ریاضی عمومی ۲

دانشگاه فنی و حرفه ای دختران ارومیه

رشته : حسابداری

مدرس : سولماز حاجی زاده

جلسه اول

فصل ۱ بردارها

بردارها و ویژگی های آن

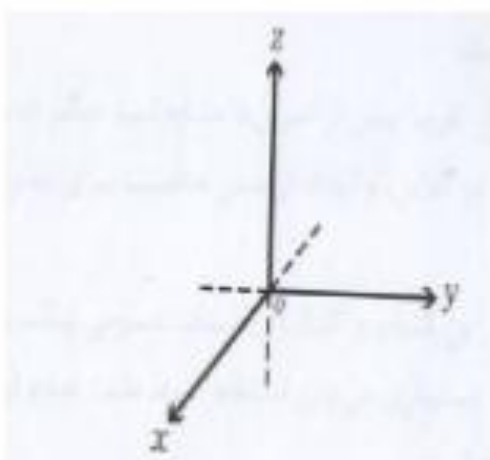
در مباحث مختلف علمی با دونوع کمیت برخورد می کنیم:

کمیت های عددی : کمیت هایی که فقط بزرگی آنها موردنظر است مانند طول، جرم، زمان، دما و جمعیت. این نوع کمیت ها را کمیت های عددی یا اسکالر می نامند.

کمیت های برداری : کمیت هایی که غیر از بزرگی، جهت آنها مورد نظر است مانند سرعت، شتاب، نیرو و شدت میدان الکتریکی. این نوع کمیت ها را کمیت های برداری می نامند.

فصل ۱ بردارها

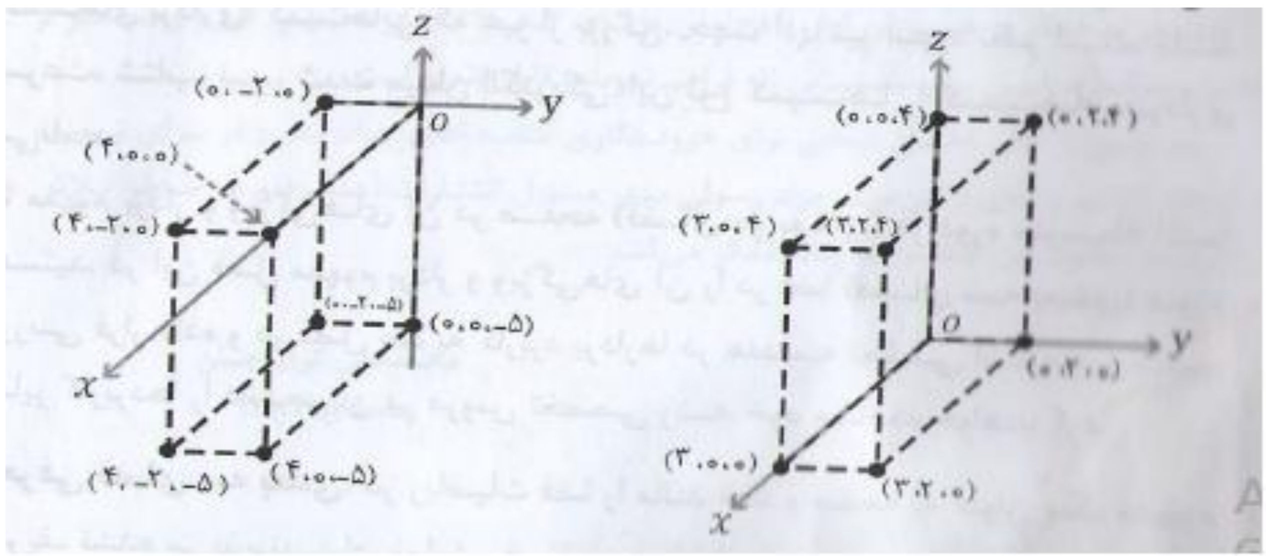
معرفی فضای سه بعدی : در ریاضیات فضا را مانند خط و صفحه به عنوان یک مفهوم تعریف نشده می پذیرند. برای نمایش هر نقطه در فضا سه محور دو به دو عمود بر هم که از یک نقطه ثابت می گذرند در نظر می گیریم. این نقطه ثابت را مبدا نامیده و با o نمایش می دهیم. محور xها و yها را در یک صفحه افقی و محور zها را عمود بر این صفحه در نظر می گیریم و بر هر محورجهت مثبتی اختیار می شود.



فصل ۱ بردارها

اگر P را نقطه ای از فضا در نظر بگیریم و از این نقطه، سه صفحه بر محور عمود کنیم، محور xها،yها و zها به ترتیب در نقاط x_0،y_0 و z_0 قطع می شود. لذا نقطه P را با سه تایی مرتب (x_0, y_0, z_0) نمایش داده و آن را مختصات نقطه ی P می گوییم، و بالعکس هر سه تایی مرتب از اعداد حقیقی، نمایش دهنده ی یک نقطه در فضا خواهد بود. از این رو فضا را، فضای سه بعدی نامیده و با $\Re^3$ نمایش می دهند. این نوع نمایش را، نمایش نقطه در دستگاه مختصات قائم یا دکارتی می گویند.

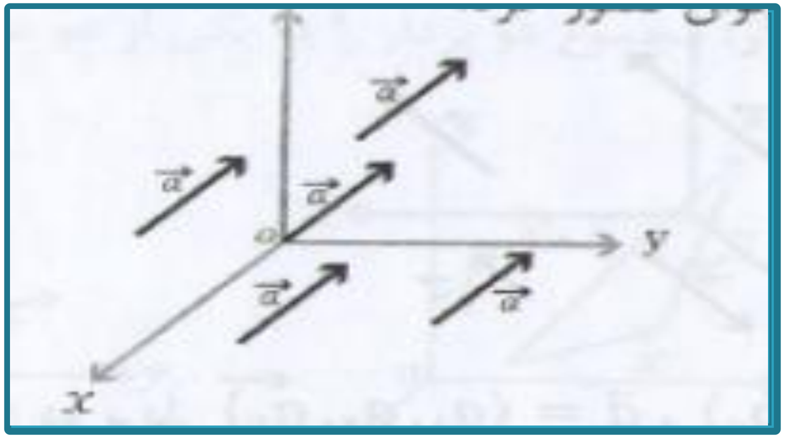
مثال: در شکل های زیر مختصات چند نقطه در فضا نمایش داده شده است.



فصل ۱ بردارها

تعریف: هر پاره خط جهت دار در فضا را بردار می نامیم. دو بردار را مساوی گوییم اگر دارای طول و جهت یکسان باشند.

نکته: بنابر تعریف فوق، بردارها با دو ویژگی طول و جهت شناخته می شوند، بنابراین آنها را هر جای فضا که بخواهیم می توان تصور کرد.



فصل ۱ بردارها

هرگاه A و B دو نقطه از فضا باشند می توان پاره خطی که نقطه A را به B وصل می کند را به عنوان نماینده ی بردارهای هم طول و هم جهت در نظر گرفت. این بردارها را با پرانتز شکسته به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A \rangle$$

مقادیر $x_B - x_A$ و $y_B - y_A$ و $z_B - z_A$ را مولفه های بردار $\overrightarrow{AB}$ می نامند.

فصل ۱ بردارها

تعریف: برداری که نقطه ابتدا و انتهای آن یکی باشد بردار صفر نامیده و با عبارت $\vec{O} = \langle 0,0,0 \rangle$ نمایش می دهیم. این بردار فاقد طول و جهت می باشد.

طول بردار: هرگاه A و B دو نقطه از فضا باشند، طول بردار $\vec{AB}$ با طول پاره خط AB برابر است و به صورت زیر محاسبه می شود.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

فصل ۱ بردارها

مثال: اگر $A=(2,3,-1)$ و $B=(0,1,5)$ آن گاه مختصات $\vec{AB}$ را بدست آورید سپس طول AB را بیابید.

$$\vec{AB}=(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=(-2,-2,6)$$

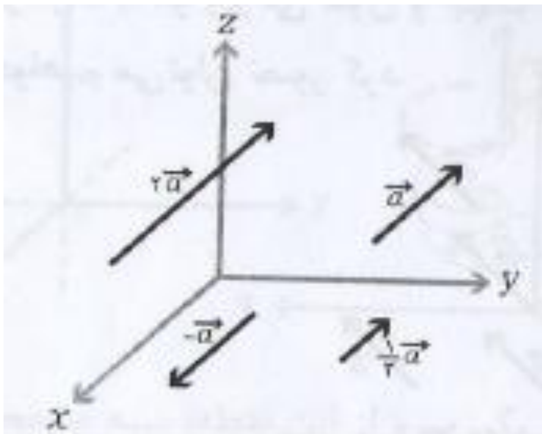
$$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(6)^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$$

فصل ۱ بردارها

ضرب یک عدد در بردار: هر گاه t یک عدد حقیقی و $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ یک بردار باشد بردار $t\vec{a}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$t\vec{a} = \langle ta_1, ta_2, ta_3 \rangle$$

تعبیر هندسی ضرب فوق در شکل مقابل نمایش داده شده است.



فصل ۱ بردارها

جمع دو بردار: هرگاه $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ و $\vec{b}=\langle b_1,b_2,b_3\rangle$ دو بردار باشند، مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{a}+\vec{b}=\langle a_۱+b_۱, a_۲+b_۲, a_۳+b_۳\rangle$$

قرینه یک بردار: هرگاه $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ آنگاه بردار $\langle -a_1,-a_2,-a_3\rangle$ را قرینه بردار $\vec{a}$ نامیده و با $-\vec{a}$ نمایش می دهیم. از تعریف جمع دو بردار داریم:

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$$

تفاضل دو بردار: تفاضل بردار $\vec{b}$ از $\vec{a}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\langle a_۱-b_۱, a_۲-b_۲, a_۳-b_۳\rangle$$

فصل ۱ بردارها

بردار یکانی: برداری که با بردار $\vec{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ موازی و هم جهت بوده و طول آن برابر یک باشد، بردار یکانی یا بردار یکه $\vec{a}$ نامیده و با $\vec{u}_a$ نمایش می دهیم. بردار $\vec{u}_a$ را سوی بردار $\vec{a}$ نیز می گویند. این بردار به صورت مقابل محاسبه می شود:

$$\vec{u_a}=\frac{۱}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

بردارهای پایه: سه بردار یکانی زیر را بردارهای پایه یا بردارهای یکانی عمود می گویند. این بردارها در محاسبات ریاضی از اهمیت فراوانی برخوردار می باشند.

$$\vec{i}=\langle ۱,۰,۰\rangle \quad , \quad \vec{j}=\langle ۰,۱,۰\rangle \quad , \quad \vec{k}=\langle ۰,۰,۱\rangle$$

فصل ۱ بردارها

نتیجه: با استفاده از ویژگی های ضرب یک عدد در بردار و جمع و تفریق بردارها، هر بردار را می توان به صورت ترکیب خطی از بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ $\vec{k}$ نوشت:

$$\vec{a} = \langle a_{۱}, a_{۲}, a_{۳} \rangle = \langle a_{۱}, ۰, ۰ \rangle + \langle ۰, a_{۲}, ۰ \rangle + \langle ۰, ۰, a_{۳} \rangle$$

$$= a_{۱} \langle ۱, ۰, ۰ \rangle + a_{۲} \langle ۰, ۱, ۰ \rangle + a_{۳} \langle ۰, ۰, ۱ \rangle = a_{۱}\vec{i} + a_{۲}\vec{j} + a_{۳}\vec{k}$$

فصل ۱ بردارها

مثال : هر گاه $A=(4,3,1)$ ، $B=(2,5,7)$ و $C=(-2,4,0)$ سه نقطه از فضا باشند مطلوبست:

۱) مولفه های بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

۲) طول بردار $\vec{AB}$

۳) بردار یکانی $\vec{AB}$

۴) بردار $\vec{AB}-2\vec{AC}$ بر حسب بردار های پایه

فصل ۱ بردارها

حل :

$$۱)\ \overrightarrow{AB} = \langle ۲ - ۴, ۵ - ۳, ۷ - ۱ \rangle = \langle -۲, ۲, ۶ \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle -۲ - ۴, ۴ - ۳, ۰ - ۱ \rangle = \langle -۶, ۱, -۱ \rangle$$

$$۲)\ |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-۲)^{۲} + ۲^{۲} + ۶^{۲}} = \sqrt{۴۴} = ۲\sqrt{۱۱}$$

$$۳)\ \overrightarrow{u_{AB}} = \frac{۱}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} = \frac{۱}{۲\sqrt{۱۱}}\langle -۲, ۲, ۶ \rangle = \langle \frac{-۱}{\sqrt{۱۱}}, \frac{۱}{\sqrt{۱۱}}, \frac{۳}{\sqrt{۱۱}} \rangle$$

$$۴)\ \overrightarrow{AB} - ۲\overrightarrow{AC} = \langle -۲, ۲, ۶ \rangle - ۲\langle -۶, ۱, -۱ \rangle = \langle ۱۰, ۰, ۸ \rangle = ۱۰\vec{i} + ۸\vec{k}$$

با آرزوی موفقیت