ریاضی عمومی ۲

دانشگاه فنی و حرفه ای دختران ارومیه

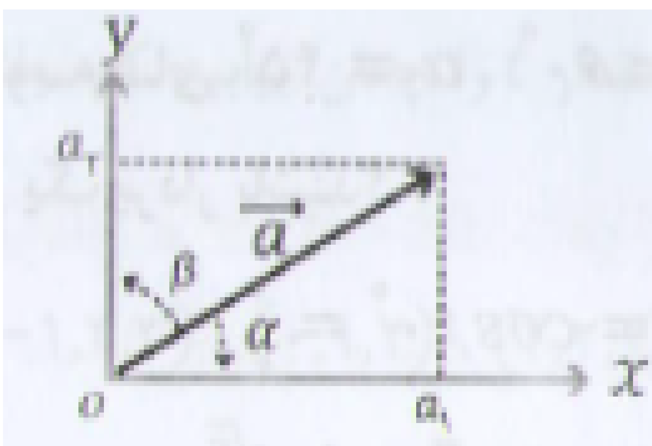
رشته : حسابداری

مدرس : سولماز حاجی زاده

جلسه دوم

فصل ۱ بردارها

زاویه های هادی بردار: اگر $\vec{a}=\langle a_1, a_2\rangle$ یک بردار غیر صفر در صفحه باشد و آن را چنان جابه جا کنیم که ابتدای آن بر مبدا مختصات منطبق شود، این بردار با جهت مثبت محورxها و yها به ترتیب زاویه های α و β می سازد. این زاویه های هادی و کسینوس آنها را کسینوس های هادی بردار $\vec{a}$ می نامند و به صورت زیر محاسبه می شود.

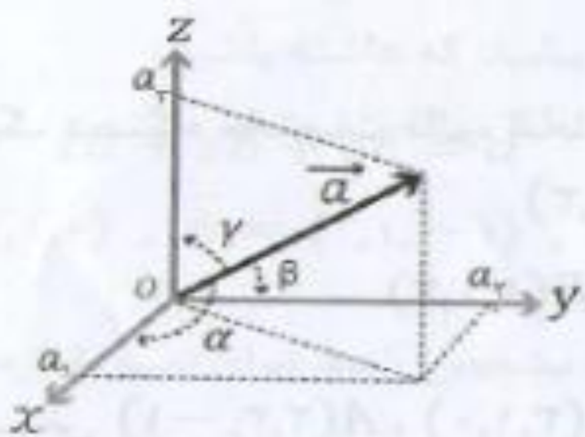


$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

فصل ۱ بردارها

هم چنین اگر $\vec{a}=\langle a_1، a_2، a_3\rangle$ یک بردار غیر صفر در فضا باشد و آن را چنان جابه جا کنیم که ابتدای آن بر مبدا مختصات منطبق شود، این بردار با جهت مثبت محور xها، yها و zها به ترتیب زاویه های α، β و γ می سازد این زاویه ها را زاویه های هادی و کسینوس آنها را کسینوس های هادی بردار $\vec{a}$ می نامند و به صورت زیر محاسبه می شود.



$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

فصل ۱ بردارها

نتیجه: بردار یکانی $\vec{a}$ را برحسب کسینوس های هادی به صورت زیر می توان نوشت:

$$\overrightarrow{u_a} = \frac{۱}{|\vec{a}|}\langle a_۱, a_۲, a_۳\rangle = \langle\frac{a_۱}{|\vec{a}|}, \frac{a_۲}{|\vec{a}|}, \frac{a_۳}{|\vec{a}|}\rangle = \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\rangle$$

با توجه به اینکه $\left|\vec{u}_a\right| = 1$ ، همواره داریم:

$$\cos^۲\alpha + \cos^۲\beta + \cos^۲\gamma = ۱$$

فصل ۱ بردارها

مثال: آیا زاویه ها $\alpha = 45^{\circ}$، $\beta = 60^{\circ}$ و $\gamma = 150^{\circ}$ می توانند به ترتیب زاویه های هادی یک بردار باشند؟

حل: داریم:

$$\cos\alpha = \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \cos\beta = \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\gamma = \cos 150^{\circ} = \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} \neq 1$$

لذا α ، β و γ نمی‌توانند زاویه‌های هادی یک بردار باشند.

تمرین: بردار $\vec{a} = \langle 3,2,-6 \rangle$ چه زوایایی با جهت مثبت محور می سازد؟

فصل ۱ بردارها

ضرب داخلی دو بردار : هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و زاویه بین آنها θ باشد ضرب داخلی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به صورت مقابل تعریف می کنیم.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\ \theta$$

ضرب داخلی را ضرب نقطه ای یا ضرب عددی نیز می گویند.

قضیه: برای دو بردار $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ داریم:

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

فصل ۱ بردارها

ویژگی های ضرب داخلی :

۱)حاصل ضرب داخلی دو بردار یک عدد است.

۲)همواره داریم: $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

۳)برای هر عدد حقیقی t داریم: $(t\vec{a}).\vec{b}=\vec{a}.(t\vec{b})=t(\vec{a}.\vec{b})$

۴)همواره داریم: $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ و $(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{c}$

۵)همواره داریم:

$$\vec{a}.\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$$

۶)دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$

فصل ۱ بردارها

مثال: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار با طول های به ترتیب ۲ و ۳ و زاویه بین ۱۲۰ درجه باشند، طول بردار $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|$ را با استفاده از ویژگی های ضرب داخلی، محاسبه کنید.

$$|2\vec{a}-\vec{b}|^2 = (2\vec{a}-\vec{b}).(2\vec{a}-\vec{b}) \quad \text{(بنابر خاصیت ۵)}$$

$$= (2\vec{a}-\vec{b}).2\vec{a} - (2\vec{a}-\vec{b}).\vec{b} \quad \text{(بنابر خاصیت ۴)}$$

$$= 2\vec{a}.2\vec{a} - \vec{b}.2\vec{a} - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} \quad \text{(بنابر خاصیت ۴)}$$

$$= 4\vec{a}.\vec{a} - 2\vec{a}.\vec{b} - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{b} \quad \text{(بنابر خاصیت ۲و۳)}$$

$$= 4|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ + |\vec{b}|^2 \quad \text{(بنابر خاصیت ۵ و تعریف ضرب داخلی)}$$

$$= 4(2)^2 - 4(2)(3)\left(-\frac{1}{2}\right) + (3)^2 = 37$$

$$\rightarrow |2\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{37}$$

فصل ۱ بردارها

مثال: در دو بردار $\vec{a}=\langle 2,t,3\rangle$ و $\vec{b}=\langle -4,2,1\rangle$ ، مقدار t را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند.

$$\vec{a}.\vec{b}=\cdot \rightarrow (-۴)(۲)+(۲)(t)+(۱)(۳)=\cdot \rightarrow ۲t=۵ \rightarrow t=\frac{۵}{۲}$$

محاسبه زاویه ی بین دو بردار: اگر θ زاویه ی بین دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، به کمک ضرب داخلی دو بردار، می توان فرمول زیر را برای محاسبه θ ارائه کرد.

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \rightarrow \theta=\cos^{-۱}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$

فصل ۱ بردارها

مثال: زاویه بین دو بردار $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ را بدست آورید.

$$\vec{a}.\vec{b} = (۰)(۲) + (۲)(-۳) + (۱)(۲) = -۴$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{۰^۲ + (۲)^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(۲)^۲ + (-۳)^۲ + (۲)^۲} = \sqrt{۱۷}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-۴}{\sqrt{۵}\sqrt{۱۷}} \rightarrow \theta = \cos^{-۱}\left(\frac{-۴}{\sqrt{۸۵}}\right) = ۱۱۵/۷^{\circ}$$

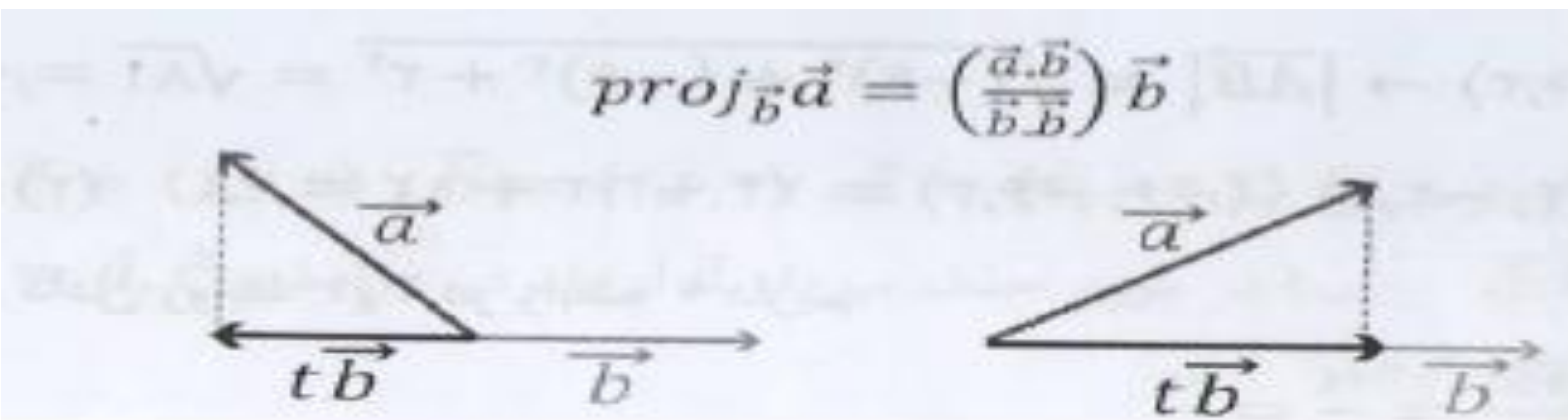
فصل ۱ بردارها

تمرین ۱) زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(1,1,0)$ و $\vec{b}=(0,1,1)$ را محاسبه کنید.

تمرین۲) طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۳ و ۴ و زاویه ی بین آنها ۳۰ درجه است زاویه ی بین دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{a}-\vec{b}$ را بدست آورید.

فصل ۱ بردارها

تصویر یک بردار بر بردار دیگر: در شکل زیر بردار $t\vec{b}$ را تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ یا مولفه $\vec{a}$ در جهت $\vec{b}$ می گویند و با نماد $proj_{\vec{b}}\vec{a}$ نمایش می دهند. فرمول زیر به کمک ضرب داخلی، روشی سریع برای محاسبه تصویر بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ ارائه می کند.



فصل ۱ بردارها

مثال: با فرض $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ تصویر $\vec{a}$ بر $\vec{b}$ و تصویر $\vec{b}$ بر $\vec{a}$ را محاسبه کنید.

$$\vec{a}.\vec{b} = 6 - 2 + 0 = 4$$

$$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$\vec{b}.\vec{b} = |\vec{b}|^2 = 3^2 + (-1)^2 + 2^2 = 14$$

$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}.\vec{b}}\right)\vec{b} = \frac{4}{14}\vec{b} = \frac{2}{7}\langle 3, -1, 2\rangle$$

$$proj_{\vec{a}}\vec{b} = \left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{a}.\vec{a}}\right)\vec{a} = \frac{4}{8}\vec{a} = \frac{1}{2}\langle 2, 2, 0\rangle = \langle 1, 1, 0\rangle$$

با آرزوی موفقیت