ریاضی عمومی ۲

دانشگاه فنی و حرفه ای دختران ارومیه

رشته : حسابداری

مدرس : سولماز حاجی زاده

جلسه چهارم

فصل ۲ هندسه تحلیلی در فضا

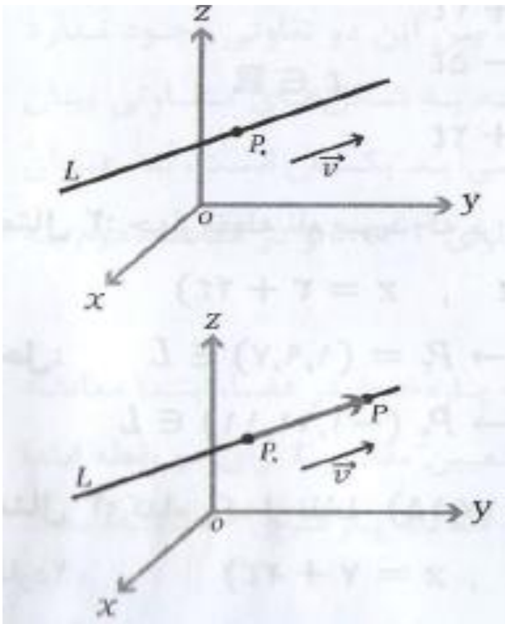
معادله خط در فضا

معادله خط در صفحه را به کمک یک نقطه و شیب آن می نوشتیم و شکل کلی آن به صورت $y-y_0=m(x-x_0)$ بود، اما معادله خط در فضا را به کمک یک نقطه و امتداد آن می نویسیم. منظور از امتداد، برداری است که با خط موردنظرموازی باشد.

معادله خط: می خواهیم معادله خط L را که از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ می گذرد و با بردار $\vec{v}=\langle a,b,c\rangle$ موازی است را بنویسیم. اگر $P(x,y,z)$ نقطه دلخواه دیگری از خط باشد، بردارهای $\overrightarrow{P_0P}$ و $\vec{v}$ موازیند و لذا عدد حقیقی مانند t موجود است به طوری که : $\overrightarrow{P_0P}=t\,\vec{v}$ پس می توان نوشت:

$$\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle = t\langle a,b,c\rangle$$

فصل ۲ هندسه تحلیلی در فضا



$$\rightarrow \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

عبارت اخیر را معادله پارامتری خط می گویند.

فصل ۲ هندسه تحلیلی در فضا

تذکر: به ازای هر عدد حقیقی t ، نقطه ای از خط حاصل می شود و اگر برای هر نقطه از فضا عددی حقیقی مانند t موجود باشد که به ازای این t، مختصات نقطه در معادله خط صدق کند، آن نقطه روی خط است.

تعریف: در معادله خط، بردار $\vec{v}=\langle a,b,c\rangle$ را بردار هادی و مقادیر a، b و c را پارامترهای هادی خط می نامند(پارامترهای هادی خط منحصر بفرد نمی باشند و هر مضربی از این اعداد را نیز می توان به عنوان پارامترهای هادی خط مورد استفاده قرار داد).

فصل ۲ هندسه تحلیلی در فضا

مثال: معادله خطی را بنویسید را که از نقطه (۲،۳،۷) می گذرد و با بردار $\vec{v}=3\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$ موازی است .

حل: مقادیر $(x_0,y_0,z_0)=(2,3,7)$ و $\vec{v}=\langle a,b,c\rangle=\langle 3,-5,2\rangle$ را در معادله زیر قرار می دهیم، معادله پارامتری خط به دست می آید.

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \quad \to \begin{cases} x = ۲ + ۳t \\ y = ۳ - ۵t \\ z = ۷ + ۲t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

مثال: کدام یک از نقاط $A(14,-17,15)$ و $B(-4,13,5)$ بر روی خط L قرار دارد؟

$$L:(x=۲+۳t\ ,\ y=۳-۵t\ ,\ z=۷+۲t)$$

حل)

$$A(۱۴,-۱۷,۱۵)\rightarrow\begin{cases}۱۴=۲+۳t\rightarrow t=۴\\-۱۷=۳-۵t\rightarrow t=۴\\۱۵=۷+۲t\rightarrow t=۴\end{cases}\rightarrow A\in L$$

$$B(-۴,۱۳,۵)\rightarrow\begin{cases}-۴=۲+۳t\rightarrow t=-۲\\۱۳=۳-۵t\rightarrow t=-۲\\۵=۷+۲t\rightarrow t=-۱\end{cases}\rightarrow B\notin L$$

فصل ۲ هندسه تحلیلی در فضا

مثال: معادله خطی را بنویسید را که از دو نقطه $A(2,1,0)$ و $B(4,2,5)$ بگذرد.

حل: بردار $\vec{AB} = \langle 2,1,5 \rangle$ موازی خط می باشد. معادله خط به کمک نقطه A و بردار $\vec{AB}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$(x = x_0 + at \ ,\ y = y_0 + bt \ ,\ z = \underline{z_0} + ct)$$

$$(x = 2 + 2t \ ,\ y = 1 + t \ ,\ z = 0 + 5t)$$

تذکر: در این مثال می توانستیم نقطه B را انتخاب کرده و معادله خط را بنویسیم:

$$(x = 4 + 2t \ ,\ y = 2 + t \ ,\ z = 5 + 5t)$$

معادله یک پاره خط در فضا: برای نوشتن معادله یک پاره خط در فضا، ابتدا معادله پارامتری خط گذرا از دو نقطه را می نویسیم. سپس با تعیین مقادیر t برای دو نقطه ابتدا و انتهای پاره خط، و محدود کردن t بین این دو مقدار، معادله پاره خط در فضا به دست می آید.

مثال: معادله پاره خطی که دو نقطه $A(-3,2,-3)$ و $B(1,-1,4)$ را به هم وصل می کند را به دست آورید.

حل: با در نظرگرفتن بردار $\vec{AB}=\langle 4,-3,7\rangle$ و نقطه B معادله پارامتری خط به صورت زیر می باشد:

$$(x = x_{\circ} + at \ , \ y = y_{\circ} + bt \ , \ z = z_{\circ} + ct)$$
$$(x = ۱ + ۴t \ , \ y = -۱ - ۳t \ , \ z = ۴ + ۷t)$$

به ازای t=0 نقطه B و به ازای t=-1 نقطه A حاصل می شود بنابراین با افزودن شرط$-1 \le t \le 0$ معادله پاره خط AB را به صورت زیر می توان نوشت:

$$(x = ۱ + ۴t \ , \ y = -۱ - ۳t \ , \ z = ۴ + ۷t \ , \ -۱ \le t \le ۰)$$

فصل ۲ هندسه تحلیلی در فضا

معادله متعارف خط: اگر مقادیر هادی خط یعنی a، b و c غیرصفر باشند می توان t را در معادله پارامتری خط حذف و شکل جدیدی برای معادله خط نوشت:

$$\begin{cases} x = x_{.} + at \rightarrow t = \dfrac{x-x_{.}}{a} \\ y = y_{.} + bt \rightarrow t = \dfrac{y-y_{.}}{b} \\ z = z_{.} + ct \rightarrow t = \dfrac{z-z_{.}}{c} \end{cases} \rightarrow \frac{x-x_{.}}{a} = \frac{y-y_{.}}{b} = \frac{z-z_{.}}{c}$$

معادله اخیر را معادله متعارف یا معادله متقارن خط می نامند.

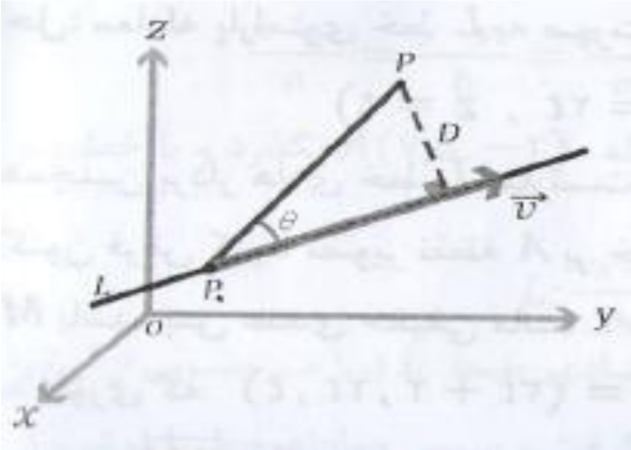
مثال: معادله متعارف خطی که از نقطه $(2,3,-4)$ می گذرد و با بردار $\vec{v} = \langle 3,5,2 \rangle$ موازی باشد را بیابید.

$$\frac{x-x_{.}}{a} = \frac{y-y_{.}}{b} = \frac{z-z_{.}}{c} \rightarrow \frac{x-۲}{۳} = \frac{y-۳}{۵} = \frac{z+۴}{۲}$$

فصل ۲ هندسه تحلیلی در فضا

فاصله یک نقطه از خط

فرض کنید L خطی موازی بردار غیر صفر $\vec{v}$ و P نقطه ای از فضا باشد. هرگاه P_0 یک نقطه دلخواه خط L باشد و فاصله نقطه P تا خط L را با D نمایش دهیم، داریم:



$$D = \frac{\left|\vec{v} \times \overrightarrow{P_0P}\right|}{|\vec{v}|}$$

مثال: فاصله نقطه $P(5,-6,2)$ را از خط L به دست آورید.

$$L:(x=1\,,\,y=-1+4t\,,\,z=2-3t)$$

حل:ابتدا نقطه دلخواهی از خط را انتخاب می کنیم. با فرض $t=0$ داریم:
$P_0(1,-1,2)\in L$ در نتیجه $\overrightarrow{P_0P}=\langle 4,-5,0\rangle$. بردار هادی خط L، $\vec{v}=\langle 0,4,-3\rangle$ است
پس می توان نوشت:

$$\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -3\\ 4 & -5 & 0\end{vmatrix}=-15\vec{i}-12\vec{j}-16\vec{k}$$

$$D=\frac{|\vec{v}\times\overrightarrow{P_0P}|}{|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{(-15)^2+(-12)^2+(-16)^2}}{\sqrt{(0)^2+(4)^2+(-3)^2}}=\frac{\sqrt{625}}{\sqrt{25}}=\frac{25}{5}=5$$

با آرزوی موفقیت