بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فنی و حرفه ای دختران ارومیه

درس تحقیق در عملیات ۲

جلسه ششم

استاد: اکرم سلطان‌پور

فصل سوم

برنامه‌ریزی خطی

(مدل حمل و نقل)

ساختار مدل حمل و نقل

ساختار ویژهٔ مدل حمل و نقل به گونه‌ای است که همواره در آن تعدادی کالای همگن از چند مبدأ یا منبع عرضه به یک سری مقصد یا مرکز تقاضا ارسال می‌گردد. ظرفیت‌های موجود در هر مبدأ (S_i) و همچنین میزان تقاضا در هر مقصد (d_j) کاملاً مشخص است. هدف اصلی در چنین مسائلی تخصیص بهینهٔ مقادیر عرضه به مراکز تقاضا می‌باشد، با این شرط که میزان کالای ارسال شده از هر مبدأ بیشتر از ظرفیت عرضهٔ آن نباشد و از سوی دیگر میزان کالای دریافت شده توسط هر مقصد به اندازهٔ نیاز (d_j) آن مقصد باشد. تابع هدف در چنین مدلی در شکل استاندارد و معمول خود درصدد حداقل کردن کل هزینهٔ حمل کالا از مبدأها به مقصدها و یا حداقل کردن ساخت وزنی بین مبدأها و مقصدها خواهد بود. مثال ۱ مفاهیم و تعاریف فوق را به روشنی نشان می‌دهد.

مثال ۱- یک شرکت تولید و توزیع دارای سه کارخانهٔ تولیدی و سه شعبهٔ فروش در سطح کشور می‌باشد. میزان ظرفیت تولیدی هر کارخانه و همچنین میزان تقاضای هر یک از شعب کاملاً مشخص می‌باشد. با توجه به مسافت بین هر یک از کارخانه‌های تولیدی و شعب هزینهٔ حمل هر واحد کالا از هر کارخانهٔ تولیدی (کارخانه i) به هر شعبه (شعبهٔ j) متفاوت بوده و برحسب جدول ۱- می‌باشد.

جدول ۱- اطلاعات مربوط به مقادیر عرضه، تقاضا و هزینهٔ حمل هر واحد کالا

مقادیر عرضه	۳	۲	۱	شعبه / کارخانه
۱۱۰	۱۰۰	۱۰۰	۵۰	۱
۱۶۰	۲۰۰	۳۰۰	۲۰۰	۲
۱۵۰	۳۰۰	۲۰۰	۱۰۰	۳
	۸۰	۲۰۰	۱۴۰	مقدار تقاضا

حال اگر شمارهٔ کارخانه را با i و شمارهٔ شعبهٔ فروش را با j نشان دهیم به راحتی می‌توان مثال ۱– را به صورت یک مسألهٔ برنامه‌ریزی خطی فرموله نمود. حال به عنوان نمونه مسألهٔ فوق را به صورت یک مسألهٔ برنامه‌ریزی براساس مراحل فرموله‌سازی، فرموله می‌کنیم.

مرحلهٔ ۱) تعریف متغیر تصمیم

متغیر تصمیم را در این مدل می‌توان با X_{ij} نشان داد.

مقدار کالای حمل شده از کارخانهٔ i به شعبهٔ فروش j: X_{ij}

بنابراین:

میزان کالای حمل شده از کارخانهٔ ۱ به شعبهٔ ۱ : $X_{۱۱}$

میزان کالای حمل شده از کارخانهٔ ۱ به شعبهٔ ۲ : $X_{۱۲}$

میزان کالای حمل شده از کارخانهٔ ۱ به شعبهٔ ۳ : $X_{۱۳}$

میزان کالای حمل شده از کارخانهٔ ۲ به شعبهٔ ۱ : $X_{۲۱}$

میزان کالای حمل شده از کارخانهٔ ۲ به شعبهٔ ۲ : $X_{۲۲}$

میزان کالای حمل شده از کارخانهٔ ۲ به شعبهٔ ۳ : $X_{۲۳}$

میزان کالای حمل شده از کارخانهٔ ۳ به شعبهٔ ۱ : $X_{۳۱}$

میزان کالای حمل شده از کارخانهٔ ۳ به شعبهٔ ۲ : $X_{۳۲}$

میزان کالای حمل شده از کارخانهٔ ۳ به شعبهٔ ۳ : $X_{۳۳}$

مرحلهٔ ۲) تعریف تابع هدف

تابع هدف در این مسأله بیانگر حداقل‌سازی مجموع هزینهٔ حمل کالاها از سه کارخانهٔ تولیدی به سه شعبهٔ فروش بوده و از مجموع حاصلضرب تعداد کالاهای حمل شده از کارخانهٔ i به شعبهٔ j در هزینهٔ حمل هر واحد آن بدست می‌آید، بنابراین برای مثال فوق تابع هدف به صورت زیر درمی‌آید:

$$\text{Min} \quad Z = ۵۰\, x_{۱۱} + ۱۰۰\, x_{۱۲} + ۱۰۰\, x_{۱۳} + ۲۰۰\, x_{۲۱} + ۳۰۰\, x_{۲۲} + ۲۰۰\, x_{۲۳}$$
$$+ ۱۰۰\, x_{۳۱} + ۲۰۰\, x_{۳۲} + ۳۰۰\, x_{۳۳}$$

$$\text{Min}\quad Z = ۵۰\, x_{۱۱} + ۱۰۰\, x_{۱۲} + ۱۰۰\, x_{۱۳} + ۲۰۰\, x_{۲۱} + ۳۰۰\, x_{۲۲} + ۲۰۰\, x_{۲۳} + ۱۰۰\, x_{۳۱} + ۲۰۰\, x_{۳۲} + ۳۰۰\, x_{۳۳}$$

s.t :

محدودیتهای عرضه

$$X_{۱۱} + X_{۱۲} + X_{۱۳} = ۱۱۰$$

$$X_{۲۱} + X_{۲۲} + X_{۲۳} = ۱۶۰$$

$$X_{۳۱} + X_{۳۲} + X_{۳۳} = ۱۵۰$$

محدودیتهای تقاضا

$$X_{۱۱} + X_{۲۱} + X_{۳۱} = ۱۴۰$$

$$X_{۱۲} + X_{۲۲} + X_{۳۲} = ۲۰۰$$

$$X_{۱۳} + X_{۲۳} + X_{۳۳} = ۸۰$$

محدودیتهای غیرمنفی $X_{ij} \geq ۰$ $(i = ۱, ۲, ۳)$ و $(j = ۱, ۲, ۳)$

مرحلهٔ ۳)

جدول ۲. تمثیل ساده‌ای از مدل حمل و نقل برای مثال ۱.

مبدأ i \ مقصد j	۱	۲	۳	S_i
۱	۵۰ / $X_{۱۱}$	۱۰۰ / $X_{۱۲}$	۱۰۰ / $X_{۱۳}$	۱۱۰
۲	۲۰۰ / $X_{۲۱}$	۳۰۰ / $X_{۲۲}$	۲۰۰ / $X_{۲۳}$	۱۶۰
۳	۱۰۰ / $X_{۳۱}$	۲۰۰ / $X_{۳۲}$	۳۰۰ / $X_{۳۳}$	۱۵۰
d_j	۱۴۰	۲۰۰	۸۰	۴۲۰ / ۴۲۰

در مدل بیان شده ساختار مدل حمل و نقل دارای سه مبدأ $(i = ۱, ۲, ۳)$ و سه مقصد $(j = ۱, ۲, ۳)$ است. در هر حال مدل عمومی[1] حمل و نقل دارای m مبدأ $(i = ۱, ۲, ..., m)$ و n مقصد $(j = ۱, ۲, ..., n)$ می‌باشد، تابلوی عمومی مدل حمل و نقل در جدول ۳- آمده است.

جدول ۳- تابلوی عمومی مدل حمل و نقل

مقصد / مبدأ	۱	۲	...	n	S_i
۱	$C_{۱۱}$ / $X_{۱۱}$	$C_{۱۲}$ / $X_{۱۲}$	...	$C_{۱n}$ / $X_{۱n}$	$S_۱$
۲	$C_{۲۱}$ / $X_{۲۱}$	$C_{۲۲}$ / $X_{۲۲}$	...	$C_{۲n}$ / $X_{۲n}$	$S_۲$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	$C_{m۱}$ / $X_{m۱}$	$C_{m۲}$ / $X_{m۲}$	...	C_{mn} / X_{mn}	S_m
	$d_۱$	$d_۲$	...	d_n	$\sum_{i=۱}^{m} S_i$ / $\sum_{j=۱}^{n} d_j$

با توجه به اصل تعادل همواره خواهیم داشت:

$$\sum_{i=۱}^{m} S_i = \sum_{j=۱}^{n} d_j \qquad (۱)$$

روشهای پیدا کردن جواب موجه اولیه

برای پیدا کردن جواب بهینهٔ مدل حمل و نقل، ابتدا باید به جواب موجه اولیه دست یافت. یافتن جواب موجه اولیه، پس از مرتب کردن اطلاعات مسأله در قالب تابلوی حمل و نقل و در صورت ضرورت متعادل کردن آنها انجام می‌گیرد. برای یافتن جواب موجه اولیه، روشهای متعددی وجود دارد که معروفترین آنها عبارتند از:

1. روش گوشه شمال غربی[1]
2. روش حداقل سطر[2]
3. روش حداقل ستون[3]
4. روش حداقل هزینه[4]
5. روش تقریب وگل[5]

روش گوشهٔ شمال غربی

مثال ۲- می‌خواهیم از سه کارخانهٔ ۱، ۲ و ۳ کالا به سه شعبهٔ A ، B و C حمل کنیم. هزینهٔ حمل هر واحد کالا، میزان ظرفیت (عرضه) کارخانه‌ها و میزان تقاضای هر یک از شعب به شرح جدول ۵- داده شده است (هزینهٔ حمل برحسب ریال می‌باشد):

جدول ۵- تابلوی حمل و نقل مثال ۲-

کارخانه \ شعبه	A	B	C	عرضه
۱	۵	۱۰	۱۰	۱۱۰
۲	۲۰	۳۰	۲۰	۱۶۰
۳	۱۰	۲۰	۳۰	۱۵۰
تقاضا	۱۴۰	۲۰۰	۸۰	۴۲۰ \ ۴۲۰

مرحلهٔ ۱) از گوشهٔ شمال غربی جدول ۵- شروع کرده و مربع A-۱ را درنظر می‌گیریم. مقدار عرضه (سطر ۱) برای مربع ۱۱۰ واحد و مقدار تقاضا (ستون A) ۱۴۰ واحد است. طبق تعریف کوچکترین مقدار عرضه و تقاضا که ۱۱۰ واحد می‌باشد اختصاص می‌یابد. طبیعی است اگرچه تقاضای شعبهٔ A، ۱۴۰ واحد است ولی کل عرضه کارخانه، ۱۱۰ واحد می‌باشد، بنابراین مقدار قابل حمل از کارخانهٔ ۱ به شعبهٔ A می‌تواند ۱۱۰ واحد باشد. به عبارت دیگر حداکثر مقداری که به مربع A-۱ اختصاص می‌یابد برابر ۱۱۰ واحد می‌باشد.

مرحلهٔ ۲) از سطر ۱ و از ستون A مقدار ۱۱۰ واحد کم کرده و باقیمانده را به عنوان عرضه و تقاضای جدید می‌نویسیم. نتیجهٔ انجام این عمل در جدول ۶- آمده است.

جدول ۶- تخصیص به اولین خانه با استفاده از روش گوشهٔ شمال غربی

مبدأ \ مقصد	A	B	C	عرضه
۱	۵ / ۱۱۰	۱۰	۱۰	~~۱۱۰~~ ۰
۲	۲۰	۳۰	۲۰	۱۶۰
۳	۱۰	۲۰	۳۰	۱۵۰
تقاضا	~~۱۴۰~~ ۳۰	۲۰۰	۸۰	

مرحلهٔ ۳ و ۴) چون سطر اول صفر شده است، پس دیگر تخصیص در این سطر امکان‌پذیر نمی‌باشد بنابراین حرکت مستقیماً از مربع A-۱ به مربع A-۲ انجام می‌گیرد. مربع A-۲ در سطرواقع شده است که مقدار عرضهٔ آن ۱۶۰ واحد و میزان تقاضای تأمین نشده شعبهٔ A ، ۳۰ واحد است. پس کمترین مقدار سطر و ستون مربوطه ۳۰ واحد است که با اختصاص آن به مرحلهٔ ۲ برمی‌گردیم. واضح است که با کم کردن ۳۰ واحد از ستون A ، مقدار باقی‌مانده صفر می‌شود و با کم کردن ۳۰ واحد از سطر دوم (مقدار عرضهٔ کارخانهٔ شمارهٔ ۲) مقدار باقیمانده (۱۳۰ = ۳۰ - ۱۶۰) ۱۳۰ واحد خواهد بود. نتیجهٔ تخصیص به مربع A-۲ در جدول ۷- آورده شده است.

جدول ۷- تخصیص به مربع A-۲ ($X_{۲A}$) - دومین تخصیص

مقصد / مبدأ	A	B	C	S_i
۱	۵ ، ۱۱۰	۱۰	۱۰	~~۱۱۰~~ ۰
۲	۲۰ ، ۳۰	۳۰	۲۰	~~۱۶۰~~ ۱۳۰
۳	۱۰	۲۰	۳۰	۱۵۰
d_j	~~۱۴۰~~ ~~۳۰~~ ۰	۲۰۰	۸۰	۴۲۰ / ۴۲۰

از آنجا که در جدول ۷- ستون A صفر شده است. به مربع کناری سمت راست یعنی (X_{2B}) حرکت می‌کنیم و کمترین مقدار سطر ۲ و ستون B را که ۱۳۰ واحد است به آن اختصاص می‌دهیم. نتیجه در جدول ۸- . آمده است. در این جدول سطر دوم صفر شده است ولی ۷۰ واحد از تقاضای شعبهٔ B باقی مانده است. بنابراین باید از ستون B مستقیماً به پایین حرکت کرد.

جدول ۸- تخصیص به مربع B-۲ ، (X_{2B}) - سومین تخصیص

مقصد / مبدأ	A	B	C	S_i
۱	۵ ، ۱۱۰	۱۰	۱۰	~~۱۱۰~~ ۰
۲	۲۰ ، ۳۰	۳۰ ، ۱۳۰	۲۰	~~۱۶۰~~ ~~۱۳۰~~ ۰
۳	۱۰	۲۰	۳۰	۱۵۰
d_j	~~۱۴۰-۳۰~~ ۰	~~۲۰۰~~ ۷۰	۸۰	

مرحلۀ ۵) مراحل ۳ و ۴ را باید آنقدر تکرار نمود تا اینکه کلیۀ تخصیص‌ها انجام شود. در مدل فوق با توجه به صفر شدن سطر ۲ تخصیص باید به خانۀ B-۳ انجام گیرد. همانگونه که ملاحظه می‌کنید به این خانه فقط می‌توان ۷۰ واحد اختصاص داد، با اختصاص ۷۰ واحد به $X_{۳B}$ ، ستون B نیز صفر می‌شود. پس باید به مربع کناری سمت راست آن یعنی خـانۀ C-۳ حرکت کرد که با اختصاص ۸۰ واحد به آن تمام سطرها و ستونها حذف مـی‌گردند و جـواب موجه اولیه حاصل می‌شود. تخصیص‌های چهارم و پنجم و جواب موجه اولیـه طـبق روش گوشۀ شمال غربی در جدول ۹- آمده است.

جدول ۹ نتایج حاصل از تخصیص چهارم (X_{3B}) و پنجم (X_{3C}) و تعیین جواب موجه اولیه براساس گوشهٔ شمال غربی

مقصد / مبدأ	A	B	C	عرضه
۱	۵ / ۱۱۰	۱۰	۱۰	~~۱۱۰~~ ۰
۲	۲۰ / ۳۰	۳۰ / ۱۳۰	۲۰	~~۱۶۰~~ ~~۱۳۰~~ ۰
۳	۱۰	۲۰ / ۷۰	۳۰ / ۸۰	~~۱۵۰~~ ~~۸۰~~ ۰
تقاضا	~~۱۴۰~~ ~~۳۰~~ ۰	~~۲۰۰~~ ~~۷۰~~ ۰	~~۸۰~~ ۰	۴۲۰ / ۴۲۰

در جدول ۹- مسیر تخصیص‌ها براساس روش گوشهٔ شمال غربی به صورت فلش ($\longrightarrow$) مشخص شده است. جواب موجه اولیه برای مثال ۲- به کمک جدول ۹- قابل تعریف است که عبارت است از:

$X_{۱A} = ۱۱۰$	$X_{۱B} = ۰$	$X_{۱C} = ۰$
$X_{۲A} = ۳۰$	$X_{۲B} = ۱۳۰$	$X_{۲C} = ۰$
$X_{۳A} = ۰$	$X_{۳B} = ۷۰$	$X_{۳C} = ۸۰$

حال این سؤال پیش می‌آید که شرط موجه بودن و اساسی بودن جواب بدست آمده در تابلوی حمل و نقل فوق‌الذکر چیست؟

برای پاسخ به این سؤال باید از خواص مدل حمل و نقل استفاده کرد. در صورتی که خاصیتهای زیر برای یک تابلوی حمل و نقل با تخصیص‌های مشخص وجود داشته باشد، جواب اساسی تعریف شده به درستی انجام گرفته است:

الف) مجموع مقادیر تخصیص داده شده به هر ستون با مقدار تقاضای آن مساوی باشد.

ب) مجموع مقادیر تخصیص داده شده به هر سطر با مقدار عرضهٔ آن مساوی باشد.

ج) تعداد متغیرهای اساسی تابلوی حمل و نقل مساوی با $m + n - ۱$ باشد.

با بررسی جدول ۹- براساس خواص چهارگانهٔ فوق درمی‌یابیم که جواب اولیهٔ بدست آمده به کمک روش گوشهٔ شمال غربی اولاً موجه و درثانی اساسی است. مقدار هزینهٔ کل حمل کالا براساس جواب موجه اولیهٔ بدست آمده، از مجموع حاصلضرب هزینهٔ حمل هر خانه در مقدار تخصیص بدست می‌آید. با توجه به صفر بودن مقدار متغیرهای غیراساسی، هزینهٔ کل حمل کالا در جدول ۹- به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Z = ۵\,(۱۱۰) + ۲۰\,(۳۰) + ۳۰\,(۱۳۰) + ۲۰\,(۷۰) + ۳۰\,(۸۰) = ۸۸۵۰$$

مراحل حل مدل حمل و نقل با استفاده از روش گوشهٔ شمال غربی

مرحلهٔ ۱) باگوشهٔ شمال غربی (گوشهٔ سمت چپ بالایی) تابلو شروع کنید. کوچکترین مقدار عرضه (سطر) و تقاضا (ستون) مربوط به آن خانه را معین کنید و مقدار مورد نظر به آن خانه اختصاص دهید.

مرحلهٔ ۲) از سطر عرضه و ستون تقاضا، مقدار اختصاص یافته را کم کنید. مقدار باقی‌مانده را بنویسید.

مرحلهٔ ۳) اگر ستون تقاضا صفر شد به خانهٔ سمت راست حرکت کنید. اگر عرضه صفر شد، مستقیماً به خانهٔ پایینی در سطر بعدی حرکت کنید. اگر به طور همزمان سطر و ستون صفر شدند، به خانهٔ کناری سمت راست، یک متغیر اساسی با مقدار تخصیص صفر تعریف کنید و به خانهٔ پایینی در سطر بعدی حرکت کنید.

مرحلهٔ ۴) به خانهٔ جدید حداکثر مقدار ممکن را اختصاص دهید و مقادیر جدید عرضه و تقاضا را برای سطر و ستون مربوطه بنویسید.

مرحلهٔ ۵) مرحلهٔ ۳ و ۴ را آنقدر تکرار کنید تا جواب موجه اولیه بدست آید. جواب موجه اولیه در صورتی حاصل می‌شود که کل عرضه و کل تقاضا به خانه‌های تابلوی حمل و نقل اختصاص یابد و کلیهٔ سطر و ستونهای تابلو صفر (خالی) گردند.

تمرینات

۱. هر یک از مدلهای حمل‌ونقل زیر را با استفاده از روش گوشهٔ شمال غربی برای بدست آوردن جواب آغازین، حل کنید

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰	۴	۲	۸
۲	۲	۳	۴	۵
۳	۱	۲	۰	۶
تقاضا	۷	۶	۶	۱۹ \ ۱۹

مبدأ \ مقصد	۱	۲	۳	عرضه
۱	۰	۲	۱	۵
۲	۲	۱	۵	۱۰
۳	۲	۴	۳	۵
تقاضا	۵	۱۰	۵	۲۰ \ ۲۰

موفق و سلامت باشید