ریاضی عمومی ۲

دانشگاه فنی و حرفه ای دختران ارومیه

رشته : حسابداری

مدرس : سولماز حاجی زاده

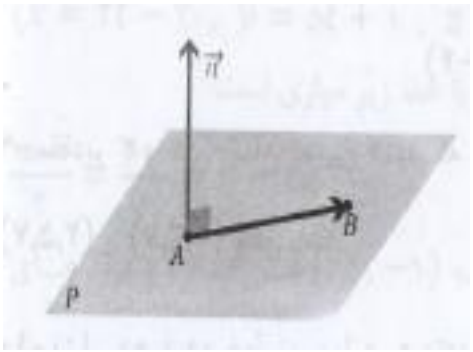
جلسه پنجم

فصل ۲ هندسه تحلیلی در فضا

معادله صفحه در فضا

مقدمه: در ریاضیات، صفحه مانند خط یکی از مفهوم های تعریف نشده می باشد. تصور ما از صفحه، یک سطح صاف می باشد که از هرطرف تا متناهی ادامه دارد. ما در دستگاه مختصات قائم صفحه را به صورت یک متوازی الاضلاع رسم کرده و معمولا با P نمایش می دهیم. معادله صفحه را به کمک یک نقطه از آن و برداری که بر آن صفحه عمود است می توان مشخص کرد. بردار عمود بر صفحه را بردار قائم بر صفحه یا بردار نرمال صفحه می گویند.

معادله صفحه: فرض کنیم $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطه معمولی از صفحه P و بردار غیرصفر $\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ بر صفحه عمود باشد. اگر $B(x, y, z)$ نقطه دلخواه دیگری از صفحه باشد دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{n}$ بر هم عمودند و داریم: $\vec{n}.\vec{AB} = 0$ بنابراین می توان نوشت:



$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (*)$$
$$ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$$

معادله * را معادله صفحه می نامند اگر به جای مقدار ثابت $ax_0 + by_0 + cz_0$ عدد $-d$ قرار دهیم معادله صفحه به صورت $ax + by + cz + d = 0$ در می آید.

مثال: معادله صفحه ای که از نقطه $(-2,1,3)$ می گذرد و بردار $\vec{n}=\langle 2,5,-1\rangle$ بر آن عمود است را بیابید.

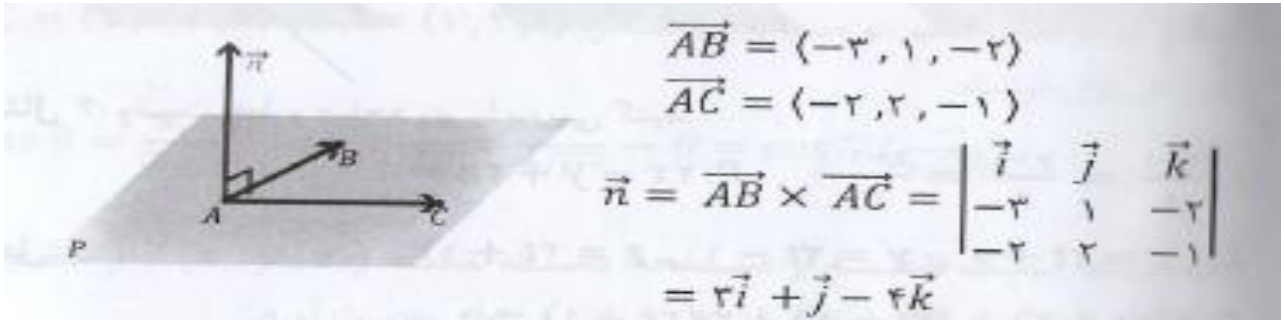
حل)

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\rightarrow 2(x+2)+5(y-1)-(z-3)=0$$
$$\rightarrow 2x+5y-z+2=0$$

مثال: از هر نقطه غیرواقع بر یک خط راست، یک صفحه می گذرد. معادله صفحه ای را بنویسید که شامل سه نقطه زیر باشد.

$$A(۱,۲,۳), B(-۲,۳,۱), C(-۱,۴,۲)$$

حل: برای نوشتن معادله صفحه نیاز به یک نقطه و برداری قائم بر صفحه داریم. با ضرب خارجی بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ می توان بردار قائم بر صفحه را بدست آورد



$$\overrightarrow{AB} = \langle -۳, ۱, -۲ \rangle$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle -۲, ۲, -۱ \rangle$$
$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -۳ & ۱ & -۲ \\ -۲ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}$$
$$= ۳\vec{i} + \vec{j} - ۴\vec{k}$$

اکنون با انتخاب یکی از سه نقطه (مثلا نقطه A) معادله صفحه را می نویسیم:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$\rightarrow 3(x-1)+(y-2)-4(z-3)=0 \rightarrow 3x+y-4z=-7$$

تذکر: اگر به کمک سه نقطه A، B و C بردارهای دیگری بسازیم و ضرب خارجی آنها را محاسبه کنیم و یا از نقطه B یا C برای نوشتن معادله صفحه کمک بگیریم، پس از ساده کردن، به معادله یکسانی می رسیم، در صورتی که در مورد معادله خط چنین نبود.

مثال: یک صفحه شامل تعداد نامتناهی نقطه است. سه نقطه بر روی صفحه $P:2x+y-z=5$ نام ببرید.

حل: کافی است در معادله صفحه دو متغییر را دلخواه انتخاب کرده و با حل معادله، متغییر سوم را به دست آوریم، بدین وسیله نقطه ای از صفحه مشخص می شود.

$$(x=۰, y=۰) \rightarrow -z=۵ \rightarrow z=-۵ \rightarrow A_۱(۰,۰,-۵) \in P$$
$$(x=۰, z=۰) \rightarrow y=۵ \rightarrow A_۲(۰,۵,۰) \in P$$
$$(x=۳, z=۲) \rightarrow ۶+y-۲=۵ \rightarrow y=۱ \rightarrow A_۳(۳,۱,۲) \in P$$

فاصله یک نقطه از صفحه

فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $ax+by+cz+d=0$ را از فرمول زیر می توان به دست آورد

$$D = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال: فاصله نقطه $(1,0,2)$ را از صفحه $4x-2y+3z=1$ به دست آورید.

حل: ابتدا معادله صفحه را به فرم خواسته شده در فرمول فاصله نقطه و صفحه می نویسم، سپس فاصله را محاسبه می کنیم:

$$۴x - ۲y + ۳z - ۱ = ۰$$

$$D = \frac{|ax_۰+by_۰+cz_۰+d|}{\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}} = \frac{|۴(۱)-۲(۰)+۳(۲)-۱|}{\sqrt{۴^۲+(-۲)^۲+۳^۲}} = \frac{۹}{\sqrt{۲۹}}$$

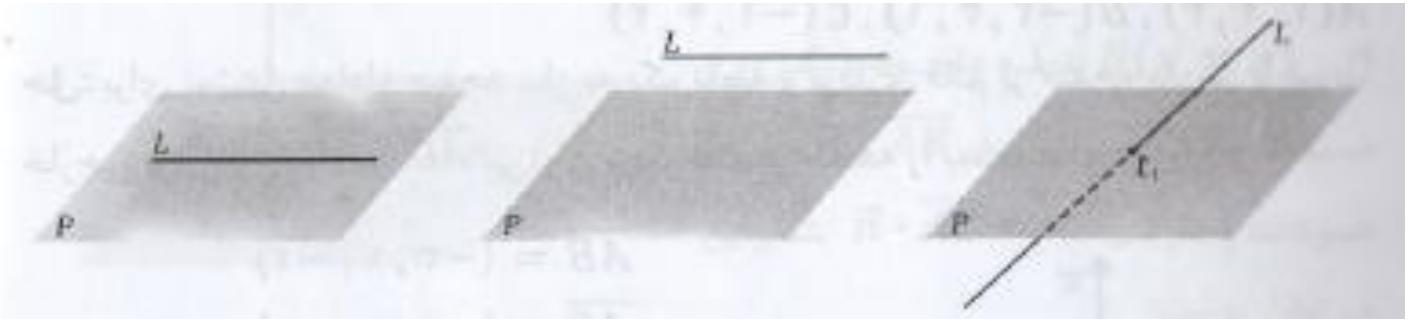
وضعیت خط و صفحه نسبت به هم:

برای بررسی وضعیت خط L و صفحه P، معادله خط را به صورت پارامتری در آورده و مقادیر به دست آمده را در معادله صفحه قرار می دهیم. حاصل این عملیات یک معادله درجه اول با متغییر t خواهد بود. برحسب تعداد جواب های این معادله درجه اول می توان وضعیت خط و صفحه را مشخص کرد. اگر M مجموعه جواب این معادله باشد، حالت های زیر را خواهیم داشت:

الف) $M=R$، خط L در صفحه P قرار دارد.

ب) $M=\{\}$، خط L و صفحه P نقطه مشترکی ندارند، در این حالت می گوییم خط و صفحه موازی هستند.

ج) $M=\{t_1\}$، خط L و صفحه P همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.



مثال: وضعیت خط و صفحه زیر را بررسی کنید.

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2} \quad , \quad P: 2x - y + 2z = 1$$

حل)

$$L: (x = 2t + 1 \ , \ y = 2t - 1 \ , \ z = 2t + 1)$$

$$P: 2(2t + 1) - (2t - 1) + 2(2t + 1) = 1$$

$$\rightarrow 6t + 5 = 1 \rightarrow t = \frac{-5}{6}$$

پس خط و صفحه، همدیگر رادر یک نقطه قطع می کنند. نقطه برخورد این دو به صورت مقابل است:

$$t = \frac{-5}{6} \rightarrow (x, y, z) = (\frac{-2}{6}, \frac{-22}{6}, \frac{-2}{6})$$

با آرزوی موفقیت