بسم الله الرحمن الرحیم

درس تحقیق در عملیات ۱

جلسه ششم

استاد: اکرم سلطان پور

برنامه‌ریزی خطی

(روش سیمپلکس)

در این فصل، یک رویکرد ریاضی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی معرفی خواهد شد. این رویکرد «روش سیمپلکس» نامیده می‌شود. روش سیمپلکس یک فن کلی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی است. در این روش، ابتدا مدل وارد یک جدول می‌شود و سپس یک سری مراحل ریاضی بر روی جدول اجرا می‌گردد. مراحل ریاضی روش سیمپلکس به نحو اثربخشی بیان‌گر فرآیند حرکت در روش ترسیمی می‌باشد که جهت حرکت را از یک گوشه به گوشه دیگر نشان می‌دهد. برخلاف روش ترسیمی که باید تمام گوشه‌های موجه را برای پیدا کردن گوشه بهینه جستجو کنیم، در روش سیمپلکس همواره از یک گوشه به گوشه‌ای بهتر حرکت کرده تا اینکه بهترین گوشه پیدا شود و توقف نماییم.

تبدیل مدل برنامه‌ریزی خطی به فرم استاندارد

اولین قدم در حل یک مدل برنامه‌ریزی خطی با استفاده از روش سیمپلکس تبدیل مدل به فرم استاندارد است.

مثال مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴۰ x_۱ + ۵۰ x_۲$$

s.t:

$$x_۱ + ۲ x_۲ \leq ۴۰$$

$$۴ x_۱ + ۳ x_۲ \leq ۱۲۰$$

$$x_۱, x_۲ \geq ۰$$

مدل استاندارد مثال به صورت زیر درمی‌آید:

$$\text{Max } Z = ۴۰ x_۱ + ۵۰ x_۲ + ۰ S_۱ + ۰ S_۲$$

s.t:

$$x_۱ + ۲ x_۲ + S_۱ = ۴۰$$

$$۴ x_۱ + ۳ x_۲ + S_۲ = ۱۲۰$$

$$x_۱, x_۲, S_۱, S_۲ \geq ۰$$

به طور خلاصه رویه تبدیل مدل برنامه‌ریزی خطی به شکل استاندارد به شرح زیر تکرار می‌شود:

الف) اگر مدل به صورت حداکثرسازی (Max) باشد:

۱. محدودیت کوچکتر مساوی (≤) را با اضافه کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.

۲. محدودیت بزرگتر مساوی (≥) را با کسر کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.

۳. محدودیت مساوی را عیناً بنویسید.

ب) اگر مدل به صورت حداقل‌سازی (Min) باشد:

۱. طرفین تابع هدف را در ۱ ـ ضرب کنید و آن را با Max بنویسید.

۲. محدودیت کوچکتر مساوی (≤) را با اضافه کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.

۳. محدودیت بزرگتر مساوی (≥) را با کسر کردن متغیر کمکی به تساوی تبدیل کنید.

۴. محدودیت تساوی (=) را عیناً بنویسید.

روش سیمپلکس

روش سیمپلکس به مجموعه‌ای از مراحل ریاضی برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی گفته می‌شود که در یک جدول که به «تابلوی سیمپلکس»[1] معروف است انجام می‌گیرد. تابلوی سیمپلکس مدل را به گونه‌ای سازماندهی می‌کند که به کارگیری مراحل ریاضی را آسانتر می‌سازد. مراحل روش سیمپلکس با استفاده از مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Max } Z = ۴۰ x_۱ + ۵۰ x_۲ + ۰ S_۱ + ۰ S_۲$$

s.t:

$$x_۱ + ۲ x_۲ + S_۱ = ۴۰$$

$$۴ x_۱ + ۳ x_۲ + S_۲ = ۱۲۰$$

$$x_۱, x_۲, S_۱, S_۲ \geq ۰$$

تابلوی اوّلیه سیمپلکس برای این مدل با ستونها و سطرهای مورد استفاده در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱. جدول اساسی (تابلوی) سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	$x_۱$	$x_۲$	$S_۱$	$S_۲$	مقادیر سمت راست

در تابلوی سیمپلکس، همواره ستون اوّل با عنوان «متغیرهای اساسی» نام‌گذاری می‌شود و ستون آخر آن بیانگر «مقادیر سمت راست» معادلات مدل است. ستونهای مابین ستون اوّل و آخر بیانگر نام متغیرهای مورد استفاده در مدل است.

سطر اوّل تابلوی سیمپلکس، به ضرایب متغیرها در تابع هدف اختصاص دارد و معمولاً این سطر را «سطر صفر»[1] گویند. برای نوشتن سطر صفر به صورت زیر عمل می‌شود:

الف) تابع هدف را به فرم Max تبدیل کنید.

ب) مقادیر سمت راست تابع هدف را به سمت چپ معادله انتقال دهید تا مقدار سمت راست تابع مساوی صفر قرار گیرد.

پس در مثال داریم:

$$\text{Max } Z = ۴۰ x_۱ + ۵۰ x_۲ + ۰ S_۱ + ۰ S_۲$$

$$Z - ۴ x_۱ - ۵۰ x_۲ = ۰$$

بدین طریق تابع هدف به فرم یکی از معادلات استاندارد مدل درآمده است.

قدم بعدی برای پرکردن تابلوی سیمپلکس، تعیین یک جواب موجه اساسی است.

جدول ۲. جواب موجه اساسی

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0						۰
S_1						۴۰
S_2						۱۲۰

جدول ۲. نشان می‌دهد که در این گوشه ($x_1 = ۰$ ،$x_2 = ۰$ ،$S_1 = ۴۰$ و $S_2 = ۱۲۰$) می‌باشند. بنابراین هنوز تولیدی صورت نگرفته است. یعنی کلیهٔ منابع دست نخورده باقی مانده و لذا مقدار سود حاصل از تولید مساوی صفر (سمت راست مقابل Z_0) است. یعنی:

$$Z - ۴۰ x_1 - ۵۰ x_2 = ۰$$

$$Z - ۴۰ (۰) - ۵۰ (۰) = ۰$$

$$Z = ۰$$

پس تابلوی اوّلیه سیمپلکس بیانگر مبدأ مختصات مدل برنامه‌ریزی خطی است.

مرحله بعد، انتقال ضرایب متغیرهای مدل چه در تابع هدف و چه در محدودیتها به درون تابلوی سیمپلکس است.

جدول ۳. تابلوی اوّلیه سیمپلکس برای مثال

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۴۰	-۵۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
S_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

از مفاهیم بیان شده تا اینجا درمی‌یابیم که در یک جواب موجه اساسی، متغیرهای مساوی صفر را «متغیرهای غیراساسی»[1] و متغیرهای بزرگتر از صفر را «متغیرهای اساسی»[1] گویند. بنابراین در تابلوی اوّل سیمپلکس، اگر مدل از نوع Max با محدودیتهای کوچکتر مساوی (≤) باشد، همواره متغیرهای اساسی (غیرصفر) متغیرهای کمکی خواهند بود و متغیرهای غیراساسی (مساوی صفر) متغیرهای تصمیم هستند.

انتخاب متغیر ورودی

در قالب اصطلاحات روش سیمپلکس می‌توان گفت x_2 متغیری است که باید در مرحلهٔ بعدی «وارد پایه» شود. چگونگی تعیین متغیر ورودی براساس ضرایب سطر صفر (Z_0) انجام می‌گیرد. از آنجا که مقادیر سمت راست تابع هدف به سمت چپ انتقال یافته است، پس آن متغیری برای ورود انتخاب می‌شود که دارای «منفی‌ترین» ضریب در ردیف Z_0 باشد. با مراجعه به جدول ۳. معلوم می‌شود که x_2 نسبت به سایر متغیرهای غیراساسی دارای بیشترین ضریب منفی (یعنی ۵۰ ــ) است. بنابراین x_2 به عنوان متغیر ورودی انتخاب می‌شود. ستون مربوط به x_2 را «ستون لولا»[1] نامیده و آن را علامت‌گذاری می‌کنیم. جدول ۴. چگونگی مشخص شدن ستون لولا را نشان می‌دهد.

جدول ۴. انتخاب متغیر ورودی

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	۴۰ ــ	۵۰ ــ	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲	۱	۰	۴۰
S_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

انتخاب متغیر خروجی

«متغیر خروجی» متغیری است که دارای «حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا باشد. طبق این قاعده S_1 به عنوان متغیر خروجی انتخاب می‌شود. جدول ۵. ردیف S_1 را به عنوان ردیف خروجی نشان می‌دهد. ردیف مربوط به متغیر خروجی را «سطر لولا»[۲] نیز می‌گویند.

جدول ۵. ستون لولا، سطر لولا، عنصر لولا

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۴۰	-۵۰	۰	۰	۰
S_1	۰	۱	۲۰	۱	۰	۴۰
S_2	۰	۴	۳	۰	۱	۱۲۰

ستون لولا

سطر لولا

عنصر لولا

عدد ۲ که در تقاطع ستون لولا و سطر لولا قرار گرفته است، «عنصر لولا»[1] نامیده می‌شود. عدد لولا، سطر لولا و ستون لولا، همگی ابزارهای مناسب و کارآمدی در تهیه تابلوی بعدی سیمپلکس خواهند بود. حال همه چیز مهیای تهیهٔ تابلوی دوّم سیمپلکس و یک جواب «بهتر» است.

تهیهٔ یک تابلوی جدید سیمپلکس

تابلوی ۶. بیانگر تابلوی دوّم سیمپلکس با جواب موجه اساسی جدید یعنی x_2 و S_2 می‌باشد. مقادیر مختلف ردیفها براساس فرمولهای مختلف سیمپلکس بدست می‌آیند. اولاً، عناصر ردیف x_2، که «ردیف لولای جدید» نامیده می‌شود، با تقسیم نمودن هر یک از عناصر ردیف لولای قدیم (تابلوی اوّل) بر عنصر لولا بدست می‌آیند. فرمول این محاسبات به شرح زیر است:

$$\text{(مقادیر ردیف لولای جدید)} = \frac{\text{مقادیر ردیف لولای قدیم}}{\text{عدد لولا}}$$

جدول ۶. متغیرهای اساسی و مقادیر ردیف لولای جدید در تابلوی دوّم سیمپلکس

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0						
x_2	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{1}{2}$	۰	۲۰
S_2						

برای محاسبهٔ ضرایب دیگر ردیفها در ردیف Z_0 و S_2 فرمول زیر کارساز است:

$$\begin{pmatrix}\text{مقادیر مربوط}\\ \text{به ردیف}\\ \text{لولای جدید}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{ضریب مربوط}\\ \text{در ستون}\\ \text{لولا}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{مقادیر}\\ \text{ردیف}\\ \text{قدیم}\end{pmatrix} = \text{(مقادیر ردیف جدید)}$$

جدول ۷ چگونگی محاسبهٔ ضرایب S_2 در تابلوی دوّم (جدید)

مقادیر ردیف جدید	=	مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید	×	ضریب مربوط در ستون لولا	−	مقادیر ردیف قدیم	ستون
۰	=	۰)	×	(۳	−	۰	Z
$\frac{۵}{۲}$	=	$\frac{۱}{۲}$)	×	(۳	−	۴	x_1
۰	=	۱)	×	(۳	−	۳	x_2
$-\frac{۳}{۲}$	=	$\frac{۱}{۲}$)	×	(۳	−	۰	S_1
۱	=	۰)	×	(۳	−	۱	S_2
۶۰	=	۲۰)	×	(۳	−	۱۲۰	سمت راست

جدول ۸. محاسبهٔ ضرایب جدید ردیف Z_0 تابلوی دوّم

مقادیر ردیف جدید	=	مقادیر مربوط به ردیف لولای جدید	×	ضریب مربوط در ستون لولا	—	مقادیر ردیف قدیم	ستون
۱	=	(۰	×	(— ۵۰	—	۱	Z
۱۵ —	=	$\frac{1}{2}$)	×	(— ۵۰	—	— ۴۰	x_1
۰	=	۱)	×	(— ۵۰	—	— ۵۰	x_2
۲۵	=	$\frac{1}{2}$)	×	(— ۵۰	—	۰	S_1
۰	=	۰)	×	(— ۵۰	—	۰	S_2
۱۰۰۰	=	۲۰)	×	(— ۵۰	—	۰	سمت راست

جدول ۹. تابلوی دوّم سیمپلکس برای مثال

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	-۱۵	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
x_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲۰
s_2	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	$-\frac{۳}{۲}$	۱	۶۰

تابلوی بهینه سیمپلکس

مراحلی که برای بدست آوردن تابلوی دوّم سیمپلکس گفته شد، برای بدست آوردن سومین تابلوی سیمپلکس براساس تابلوی دوّم مجدداً تکرار می‌شود.

اولاً؛ ستون لولا یا متغیر ورودی براساس منفی‌ترین مقدار ردیف Z_0 مشخص می‌شود. براساس این قاعده متغیر ورودی x_1 خواهد بود. چون دارای ضریب ۱۵ − در ردیف Z_0 است و تنها متغیر منفی نیز می‌باشد.

ثانیاً؛ متغیر خروجی یا سطر لولا را براساس حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت تعیین می‌کنیم. براساس این قاعده متغیر خروجی S_2 خواهد بود:

متغیرهای اساسی	مقادیر سمت راست
x_2	$۲۰ \div \frac{۱}{۲} = ۴۰$
S_2	$۶۰ \div \frac{۵}{۲} = ۲۴$

متغیر خروجی S_2 می‌باشد.

ستون لولا، سطر لولا و عدد لولا در جدول ۱۰. تعیین شده است.

جدول ۱۰. سطر لولا، ستون لولا، عدد لولا در تابلوی دوّم سیمپلکس

ستون لولا

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	۱۵-	۰	۲۵	۰	۱۰۰۰
x_2	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۲۰
S_2	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	$\frac{۳}{۲}$	۱	۶۰

عدد لولا

سطر لولا

جدول ۱۱. تابلوی سوم سیمپلکس مثال

متغیرهای اساسی	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	مقادیر سمت راست
Z_0	۱	۰	۰	۱۶	۶	۱۳۶۰
x_2	۰	۰	۱	$\frac{۴}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	۸
X_1	۰	۱	۰	$-\frac{۴}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$	۲۴

«شرط بهینگی» یک تابلوی سیمپلکس آن است که تمام مقادیر سطر صفر (Z_0) «غیرمنفی» باشند. طبق این قاعده، تابلوی سوم سیمپلکس برای مثال از شرط بهینگی برخوردار است. پس مسأله به گوشهٔ بهینهٔ رسیده است و جواب مسأله در این گوشه عبارتست از:

$x_1 = ۲۴, x_2 = ۸, S_1 = ۰, S_2 = ۰, Z^* = ۱۳۶۰$

خلاصه مراحل روش سیمپلکس

۱. مدل مسأله را به فرم استاندارد تبدیل کنید. یعنی تابع هدف از نوع Max و نامعادلات را به معادله تبدیل کنید.

۲. تابلوی اولیه سیمپلکس را براساس جواب موجه اساسی در مبدأ مختصات مدل تنظیم کنید.

۳. ستون لولا (متغیر ورودی) را براساس منفی‌ترین ضریب سطر صفر (Z_0) تعیین کنید.

۴. سطر لولا (متغیر خروجی) را براساس حداقل حاصل تقسیم مقادیر سمت راست بر عناصر مثبت ستون لولا تعیین کنید.

۵. ضرایب سطر لولای جدید را با استفاده از فرمول زیر محاسبه کنید:

$$\text{ضرایب سطر لولای جدید} = \frac{\text{ضرایب سطر لولای قدیمی}}{\text{عدد لولا}}$$

۶. ضرایب دیگر ردیفها را در تابلوی جدید براساس فرمول زیر محاسبه کنید:

$$\text{ضرایب سطر جدید} = \text{ضرایب سطر قدیمی} - \left(\text{ضرایب مربوط به سطر لولای جدید} \times \text{ضرایب مربوط در ستون لولا}\right)$$

۷. شرط بهینگی را با کنترل عناصر ردیف Z_0 بررسی کنید. اگر همهٔ مقادیر سطر صفر تابلوی سیمپلکس غیرمنفی (≥ 0) باشند، جواب بهینه حاصل شده است و گرنه (وجود عنصر منفی در سطر Z_0) به مرحلهٔ ۳ برگردید و مراحل سیمپلکس را تکرار کنید).

تمرینات

۱. تابلوی سیمیلکس زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات موردنظر پاسخ دهید؟

متغیرهای اساسی	Z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	سمت راست
Z_0	۱	۰	۰	$\frac{۵}{۲}$	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳۰
X_2	۰	۰	۱	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	۰	۰	۱۰
S_2	۰	۰	۰	$-\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۲۰
X_1	۰	۱	۰	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱۰

الف) تعداد محدودیتهای مدل را بنویسید؟

ب) چند تا از محدودیتهای مدل به صورت مساوی است؟ چرا؟

ج) متغیرهای غیراساسی را مشخص کنید؟

د)جواب مربوط به این تابلو را بنویسید؟

۲. جواب بهینهٔ مدل LP زیر را با استفاده از روش ترسیمی و سیمپلکس بدست آورید؟

$$\text{Max } Z = ۴x_1 + ۵x_2$$

s.t:

$$x_1 + ۲x_2 \leq ۱۰$$
$$۶x_1 + ۶x_2 \leq ۳۶$$
$$x_1 \leq ۴$$
$$x_1, x_2 \geq ۰$$

موفق و سلامت باشید