ریاضی عمومی ۲

دانشگاه فنی و حرفه ای دختران ارومیه

رشته : حسابداری

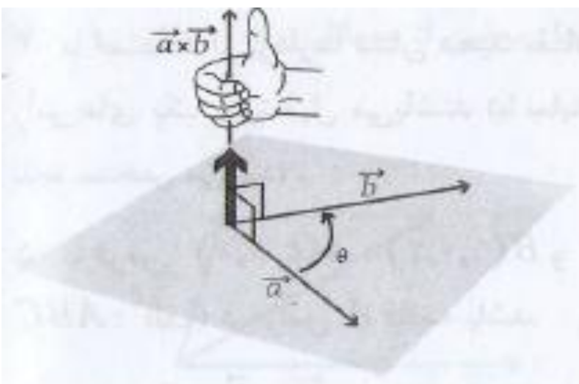
مدرس : سولماز حاجی زاده

جلسه سوم

فصل ۱ بردارها

ضرب خارجی دو بردار: فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیر صفر و غیر موازی باشند، این دو بردار صفحه ای در فضا را مشخص می کنند. به این دو بردار، بردار دیگری را نسبت می دهیم که آن را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نمایش داده و آن را ضرب خارجی یا ضرب برداری دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می نامیم.

* بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ دارای ویژگی های زیر است:



الف) برصفحه شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است.

ب)جهت آن از قانون دست راست تبعیت می کند.

ج)طول آن برابر است با:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

فصل ۱ بردارها

تعمیم تعریف ضرب خارجی: ضرب خارجی دو بردار را با شرط اینکه دو بردار غیر صفر و غیر موازی باشند، تعریف کردیم. اکنون قرارداد می کنیم اگر حداقل یکی از بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ صفر یا بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی باشند، بنویسیم: $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$

ویژگی های ضرب خارجی:

۱) همواره داریم:

۲) اگر t یک عدد حقیقی باشد داریم:

۳) همواره داریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$$

$$(t\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(t\vec{b})=t(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$$

فصل ۱ بردارها

۴) ضرب خارجی بردارهای پایه به صورت زیر است:

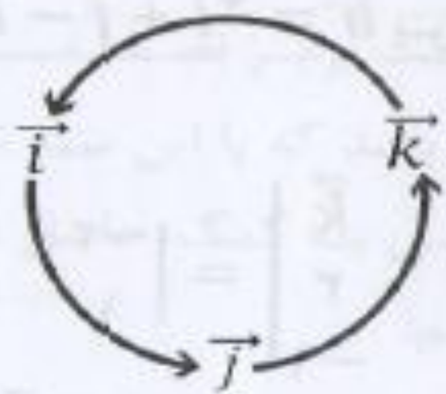
(نمودار زیر برای به خاطر سپردن آنها مفید است).

$$\vec{i}\times\vec{j} = -(\vec{j}\times\vec{i}) = \vec{k}$$

$$\vec{j}\times\vec{k} = -(\vec{k}\times\vec{j}) = \vec{i}$$

$$\vec{k}\times\vec{i} = -(\vec{i}\times\vec{k}) = \vec{j}$$

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{o}$$



فصل ۱ بردارها

نکته: به کمک تعریف دترمینان ماتریس، محاسبات ضرب خارجی دو بردار را به صورت زیر می توان نمایش داد.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}$$

یادآوری: به هر ماتریس مربعی یک عدد به صورت زیر نسبت می دهند که آن را دترمینان ماتریس می نامند. دترمینان ماتریس های 2×2 و 3×3 به صورت زیر محاسبه می شود.

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\rightarrow det(A)=|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}\rightarrow det(A)=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$$

مثال: با فرض $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ حاصل بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{j}$ را محاسبه کنید.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\rightarrow \vec{a} \times \vec{j} = -3\vec{i} + \vec{k}$$

فصل ۱ بردارها

نکته ۱

مساحت متوازی الاضلاعی که با استفاده از دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود برابر است با:

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

نکته ۲

مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می شود برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

فصل ۱ بردارها

مثال: مساحت های متوازی الاضلاع و مثلثی که توسط دو بردار $\vec{AB} = \langle 2,-2,-3 \rangle$ و $\vec{AC} = \langle 4,0,6 \rangle$ تولید می شود را محاسبه کنید.

مساحت متوازی الاضلاع

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2}$$

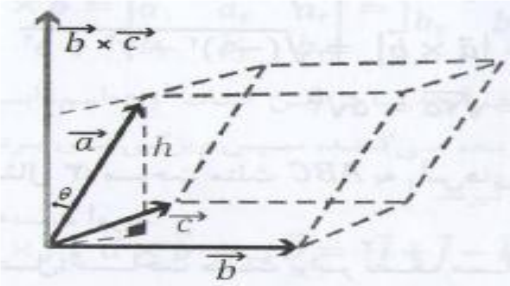
مساحت مثلث

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 14$$

فصل ۱ بردارها

ضرب عددی سه بردار: هرگاه $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند، عبارت $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ را ضرب عددی یا ضرب مختلط سه بردار می گویند.

تعبیر هندسی ضرب عددی سه بردار: هرگاه $\vec{a}$،$\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار باشند، حجم متوازی السطوحی که توسط این سه بردار می توان تصور کرد برابر است با:



$$V = \left|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|$$

متوازی السطوح یک شش وجهی می باشد که وجه های مقابل آن با هم موازی هستند.

فصل ۱ بردارها

محاسبه ضرب عددی سه بردار به کمک مولفه های آنها:

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$= \langle a_1, a_2, a_3\rangle\cdot\left\langle\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\right\rangle$$

$$= a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}$$

عبارت اخیر دترمینان یک ماتریس 3×3 می باشد. بنابراین ضرب عددی سه بردار را به صورت زیر می توان نمایش داد.

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

فصل ۱ بردارها

مثال: حجم جعبه ای که توسط سه بردار زیر ساخته می شودرا محاسبه کنید.

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{k} \quad , \quad \vec{c} = 7\vec{j} - 4\vec{k}$$

حل) این جعبه متوازی السطوح می باشد و حجم آن، به کمک ضرب عددی سه بردارمحاسبه می شود.

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -21 - 16 + 14 = -23$$

$$\rightarrow V = |\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})| = 23$$

فصل ۱ بردارها

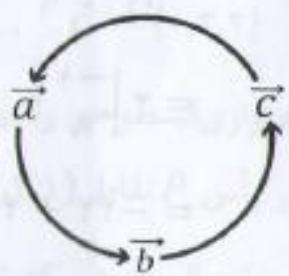
ویژگی های ضرب عددی سه بردار:

۱)اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ دریک صفحه قرار گیرند داریم: $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=0$

۲)همواره داریم: $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$

۳)حاصل ضرب عددی سه بردار در تبدیل دایره ای عوامل آن، تغییر نمی کند، ولی جابه جایی دو بردار علامت را تغییر می دهد.

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$$
$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b})$$
$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c})$$



فصل ۱ بردارها

مثال: هم صفحه بودن بردارهای زیر را بررسی کنید.

$\vec{a} = \langle ۲,۳,-۱\rangle \quad , \quad \vec{b} = \langle ۱,-۱,۳\rangle \quad , \quad \vec{c} = \langle ۱,۹,-۱۱\rangle$

بنابر ویژگی ضرب عددی سه بردار کافی است مقدار $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ را محاسبه کنیم. اگر حاصل صفر شود، سه بردار هم صفحه، در غیر این صورت، بردارها در یک صفحه قرار ندارند

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & -۱ \\ ۱ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۹ & -۱۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۲\begin{vmatrix} -۱ & ۳ \\ ۹ & -۱۱ \end{vmatrix} - ۳\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۱ & -۱۱ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۹ \end{vmatrix}$$

$$= -۳۲ + ۴۲ - ۱۰ = ۰$$

تمرین۱) هم صفحه بودن بردارهای زیر را بررسی کنید.

$$\vec{a} = \langle ۲,۱,۰ \rangle \quad , \quad \vec{b} = \langle ۰,۲,۱ \rangle \quad , \quad \vec{c} = \langle ۱,۰,۲ \rangle$$

تمرین ۳) حجم متوازی السطوحی که توسط بردارهای زیر پدید می آید برابر۲۵ است مقدار t را بیابید.

$$\vec{a} = \langle ۰,۲,۱ \rangle \quad , \quad \vec{b} = \langle ۱,۲,t \rangle \quad , \quad \vec{c} = \langle ۲,t,۳ \rangle$$

با آرزوی موفقیت