بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فنی و حرفه‌ای دختران ارومیه

درس ریاضی کاربردی

جلسه هفتم

استاد: اکرم سلطان پور

دستگاه معادلات خطی (n معادله n مجهولی)

دستگاه معادلات خطی به صورت کلی n معادله n مجهولی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

که در آن a_{ij}ها اعداد معلوم هستند و آنها را ضرایب مجهولات می‌نامیم و b_i ها اعداد داده شده هستند. یک جواب برای دستگاه (۱)، مجموعه‌ای از اعداد x_1، x_2، ... ، x_n است که در تمام n معادله صدق کند.

با توجه به تعریف ضرب ماتریس‌ها، دستگاه (۱) را می‌توان به فرم زیر بیان کرد.

$$AX = B \qquad (۲)$$

که A یک ماتریس $n \times n$ از ضرایب مجهولات و به ماتریس ضرایب معروف می‌باشد و X یک ماتریس ستونی $n \times ۱$ از مجهولات و به ماتریس مجهولات موسوم است و B یک ماتریس $n \times ۱$ از اعداد ثابت طرف دوم دستگاه می‌باشد و به ماتریس مقادیر معلوم معروف است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

از (۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

مشروط بر آن که A^{-1} موجود باشد (ماتریس A، معکوس پذیر باشد)

مثال : دستگاه
$$\begin{cases} ۴y + ۲z = ۱ \\ -۵x + y + ۳z = ۲ \\ ۲x + y + ۵z = ۰ \end{cases}$$
را حل کنید.

حل: با انتخاب $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ & ۲ \\ -۵ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ داریم

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-۱}B$$

ابتدا $A^{-۱}$ را از فرمول $A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} adj\, A$ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، نخست باید $det\, A$ را محاسبه نمود. با استفاده از دستور ساروس داریم

$$|A| = \begin{vmatrix} ۰ & ۴ & ۲ \\ -۵ & ۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{vmatrix} \begin{matrix} ۰ & ۴ \\ -۵ & ۱ \\ ۲ & ۱ \end{matrix} = ۱۱۰$$

برای محاسبه $adj\, A$، ابتدا A^T را نوشته و سپس همسازه‌های آن را حساب می‌کنیم

$$A^T = \begin{bmatrix} ۰ & -۵ & ۲ \\ ۴ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$A_{۱۱} = +\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۵ - ۳ = ۲ \quad , \quad A_{۱۲} = -\begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} = -۱۸$$

$$A_{۱۳} = +\begin{vmatrix} ۴ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} = ۱۰ \quad , \quad A_{۲۱} = -\begin{vmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{vmatrix} = ۳۱$$

$$A_{۲۲} = +\begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ ۲ & ۵ \end{vmatrix} = -۴ \quad , \quad A_{۲۳} = -\begin{vmatrix} ۰ & -۵ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} = ۱۰$$

$$A_{۳۱} = +\begin{vmatrix} -۵ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix} = -۷ \quad , \quad A_{۳۲} = -\begin{vmatrix} ۰ & ۲ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix} = ۸$$

$$A_{۳۳} = +\begin{vmatrix} ۰ & -۵ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix} = ۲۰$$

$$adj\,A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱۸ & ۱۰ \\ ۳۱ & -۴ & ۱۰ \\ -۷ & ۸ & ۲۰ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۱۰}\begin{bmatrix} ۲ & -۱۸ & ۱۰ \\ ۳۱ & -۴ & ۱۰ \\ -۷ & ۸ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}B = \frac{۱}{۱۱۰}\begin{bmatrix} ۲ & -۱۸ & ۱۰ \\ ۳۱ & -۴ & ۱۰ \\ -۷ & ۸ & ۲۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۱۰}\begin{bmatrix} -۳۴ \\ ۲۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۳۴/۱۱۰ \\ ۲۳/۱۱۰ \\ ۹/۱۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{۳۴}{۱۱۰} \quad , \quad y = \frac{۲۳}{۱۱۰} \quad , \quad z = \frac{۹}{۱۱۰} \quad \square$$

اگر ماتریس B ، ماتریس صفر باشد یعنی تمام b_i ها برابر صفر باشند، دستگاه را دستگاه همگن می‌نامیم. در این صورت دستگاه دارای یک دسته جواب بدیهی

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ می‌باشد و شرط وجود جواب‌های غیر صفر، آن است که

دترمینان ضرایب یعنی $detA$ برابر صفر باشد.

دستور کرامر برای حل دستگاه معادلات خطی n معادله n مجهولی

به طور کلی جواب دستگاه

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

را می‌توان از روابط زیر به دست آورد.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \ , \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

به عبارت دیگر $\Delta_i = x_i\Delta$، که در آن Δ عبارت است از دترمینان ضرایب یعنی $\Delta = detA$ و Δ_i عبارت است از دترمینان ضرایب که به جای ستون i ام آن، مقادیر طرف دوم را قرار داده باشیم.

توجه: ۱) اگر دستگاه غیر همگن باشد و $\Delta \neq 0$ باشد، آنگاه دستگاه دارای یک دسته جواب می‌باشد و چنانچه $\Delta = 0$ باشد، دستگاه جواب ندارد.

۲) اگر دستگاه همگن باشد، داریم $\Delta_i = 0$ (زیرا تمام عناصر یک ستون در دترمینان صفر است) و چنانچه $\Delta \neq 0$ باشد، دستگاه دارای جواب بدیهی $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ خواهد بود و چنانچه $\Delta = 0$ باشد، دستگاه بینهایت جواب دارد، ($0x_i = 0$ و x_i می‌تواند هر عدد دلخواهی باشد)

مثال : دستگاه
$$\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$
را حل کنید.

حل: ابتدا دترمینان ضرایب را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

چون دستگاه همگن و $\Delta = 0$، لذا دستگاه دارای بینهایت دسته جواب می‌باشد. $\square$

مثال : دستگاه $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=۲ \\ x-y-۲z=-۱ \\ ۲x+y-z=۴ \end{array}\right.$ را حل کنید.

حل: دترمینان ضرایب را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۲ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۳ \quad \Rightarrow \Delta = ۳$$

حال $\Delta_۱$، $\Delta_۲$ و $\Delta_۳$ را به دست می‌آوریم.

$$\Delta_۱ = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ & -۲ \\ ۴ & ۱ & -۱ \end{vmatrix} = ۰ \ , \ \Delta_۲ = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۱ & -۲ \\ ۲ & ۴ & -۱ \end{vmatrix} = ۹ \ ,$$

$$\Delta_۳ = \begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۴ \end{vmatrix} = -۳$$

$$x = \frac{\Delta_۱}{\Delta} = \frac{۰}{۳} = ۰ \ , \ y = \frac{\Delta_۲}{\Delta} = \frac{۹}{۳} = ۳ \ , \ z = \frac{\Delta_۳}{\Delta} = \frac{-۳}{۳} = -۱ \quad \square$$

مثال : دستگاه
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$
را حل کنید.

حل: دترمینان ضرایب را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad \Rightarrow \Delta = 3$$

چون دستگاه همگن و $\Delta \neq 0$، لذا دستگاه دارای جواب بدیهی $x = y = z = 0$ می‌باشد. □

تمرین

۱- دستگاه زیر را با استفاده از دستور کرامر حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+z=۱۱ \\ ۲x-۶y-z=۰ \\ ۳x+۴y+۲z=۰ \end{cases}$$

۲- مقدار a را طوری پیدا کنید که دستگاه زیر بینهایت جواب داشته باشد

$$\begin{cases} x+۲y=۰ \\ ۲x-ay=۰ \end{cases}$$

۳- مقدار a را طوری تعیین کنید که دستگاه زیر جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ ax+y=۲ \end{cases}$$

۴- مقدار a را طوری تعیین کنید که دستگاه زیر همواره جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} ax+y=۲ \\ x-ay=۱ \end{cases}$$

۵- دستگاه زیر، به ازای چه مقدار k، جواب‌های غیر صفر دارد.

$$\begin{cases} x+ky+z=۰ \\ x-y-z=۰ \\ x+۲y+z=۰ \end{cases}$$

موفق و سلامت باشید