بسم الله الرحمن الرحیم

درس ریاضی عمومی ۲ و ریاضی کاربردی

جلسه ششم

استاد: اکرم سلطان پور

محاسبه معکوس ماتریس با استفاده از عملیات مقدماتی سطری

عملیات مقدماتی سطری برای ماتریس‌ها

۱ـ تعویض سطر i ام با سطر j ام (تعویض جای دو سطر)

۲ـ ضرب یک سطر در یک عدد ثابت و مخالف صفر.

۳ـ جمع کردن k برابر یک سطر با سطر i ام و قرار دادن آن به جای سطر i ام ماتریس.

ماتریس‌های هم ارز

دو ماتریس A و B را هم ارز سطری نامیده و آن را با نماد $A \sim B$ نشان می‌دهیم،

هرگاه یکی از دو ماتریس با انجام تعداد محدودی از عملیات مقدماتی سطری بر روی دیگری

به دست آمده باشد.

اگر بتوان با یک سری عملیات مقدماتی سطری، ماتریس A را به ماتریس یکه I تبدیل نمود. در این صورت با همان سری عملیات مقدماتی سطری روی ماتریس I، ماتریس A^{-1} به دست می‌آید. این روش، روشی مناسب برای پیدا کردن معکوس ماتریس‌های منظم $(detA \neq 0)$ می‌باشد. اگر A یک ماتریس منظم باشد و بتوان ماتریس $[A|I]$ را با تبدیلات مقدماتی سطری به ماتریس $[I|B]$ تبدیل نمود، آنگاه $B = A^{-1}$ می‌باشد.

منظور از ماتریس منظم همان ماتریس نامنفرد است

با یک مثال توضیح می‌دهیم چطور با انجام عملیات مقدماتی سطری روی ماتریس منظم می‌توان ماتریس معکوس آن را به دست آورد.

مثال : معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۶ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۳ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

حل: ابتدا ماتریس $[A|I]$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۲ & ۴ & ۶ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۶ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۳ & ۱ & -۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

مرحله اول: جای سطر دوم را با سطر اول عوض می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۴ & ۵ & ۶ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ & -۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

حال سطر اول را در $\frac{۱}{۴}$ ضرب می‌کنیم تا اولین عدد برابر ۱ بشود.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۵/۴ & ۳/۲ & ۰ & ۱/۴ & ۰ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ & -۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

حال سطر اول را در ۲- ضرب و با سطر دوم جمع کرده و به جای سطر دوم قرار می‌دهیم. همچنین سطر اول را در ۳- ضرب و با سطر سوم جمع می‌کنیم و به جای سطر سوم قرار می‌دهیم. پایان مرحله اول.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۵/۴ & ۳/۲ & ۰ & ۱/۴ & ۰ \\ ۰ & ۳/۲ & ۳ & ۱ & -۱/۲ & ۰ \\ ۰ & -۱۱/۴ & -۱۳/۲ & ۰ & -۳/۴ & ۱ \end{array}\right]$$

مرحله دوم: چون $\left|\frac{3}{2}\right| < \left|-\frac{11}{4}\right|$، لذا جای سطر سوم را با سطر دوم عوض می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5/4 & 3/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -11/4 & -13/2 & 0 & -3/4 & 1 \\ 0 & 3/2 & 3 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right]$$

سطر دوم را در $-\frac{4}{11}$ ضرب می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5/4 & 3/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 26/11 & 0 & 3/11 & -4/11 \\ 0 & 3/2 & 3 & 1 & -1/2 & 0 \end{array}\right]$$

حال سطر دوم را در $-\frac{5}{4}$ ضرب و با سطر اول جمع کرده و به جای سطر اول قرار می‌دهیم، همچنین سطر دوم را در $-\frac{3}{2}$ ضرب و با سطر سوم جمع و به جای سطر سوم قرار می‌دهیم. پایان مرحله دوم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -16/11 & 0 & -1/11 & 5/11 \\ 0 & 1 & 26/11 & 0 & 3/11 & -4/11 \\ 0 & 0 & -6/11 & 1 & -10/11 & 6/11 \end{array}\right]$$

مرحله سوم: سطر سوم را در $-\frac{۱۱}{۶}$ ضرب می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & -۱۶/۱۱ & ۰ & -۱/۱۱ & ۵/۱۱ \\ ۰ & ۱ & ۲۶/۱۱ & ۰ & ۳/۱۱ & -۴/۱۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -۱۱/۶ & ۱۰/۶ & -۱ \end{array}\right]$$

سطر سوم را در $-\frac{۲۶}{۱۱}$ ضرب و با سطر دوم جمع و به جای سطر دوم قرار می‌دهیم و همچنین سطر سوم را در $\frac{۱۶}{۱۱}$ ضرب و با سطر اول جمع و به جای سطر اول قرار می‌دهیم.

پایان مرحله سوم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & ۰ & ۰ & -\frac{۱۶}{۶} & \frac{۱۵۴}{۶۶} & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \frac{۱۳}{۳} & -\frac{۱۲۱}{۳۳} & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & -\frac{۱۱}{۶} & \frac{۱۰}{۶} & -۱ \end{array}\right]$$

بنابراین

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{6} & \frac{154}{66} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{121}{33} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{10}{6} & -1 \end{bmatrix}$$

مثال : معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود، پیدا کنید.

حل:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

بنابراین $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -4 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

در این مثال در مرحله اول جای سطر اول و سوم را عوض کرده، در مرحله دوم سطر دوم را با سطر اول جمع کرده و در سطر دوم جایگذاری کرده، مرحله سوم سطر سوم را منهای سطر دوم کرده و در سطر سوم قرار داده، در مرحله چهارم سطر دوم را منهای دوبرابر سطر سوم و سطر اول را بعلاوه سه برابرسطر سوم کرده و در سطرها قرارداده.

فرض کنید می‌خواهیم معکوس ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

را پیدا کنیم. ابتدا ماتریس $[A|I]$ را می‌نویسیم

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

مرحله اول: ابتدا به ستون اول توجه می‌کنیم و بزرگترین عدد از لحاظ قدر مطلق را در این ستون انتخاب می‌کنیم فرض کنید a_{i1} از لحاظ قدرمطلق از بقیه اعداد ستون اول بزرگتر باشد. حال جای سطر مربوط به آن را با سطر اول عوض می‌کنیم. ماتریس به دست آمده، هم ارز ماتریس اول می‌باشد.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccccc} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & & \cdots & & & 1 \end{array}\right]$$

حال سطر اول را در $b^*_{i1} = \frac{1}{a_{i1}}$ ضرب می‌کنیم. ماتریس حاصل، هم ارز با ماتریس بالا می‌باشد[1].

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & b_{i2} & \cdots & b_{in} & 0 & 0 & \cdots \frac{1}{a_{i1}} & 0 \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{array}\right]$$

سپس سطر اول را در $-a_{21}$ ضرب و با سطر دوم جمع و به جای سطر دوم قرار می‌دهیم. همین کار را برای بقیه سطرها انجام داده و ماتریس هم ارز زیر را به دست می‌آوریم.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & b_{i2} & \cdots & b_{in} & 0 & 0 & \cdots b^*_{i1} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & 0 & 1 & \cdots b^*_{i1} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & c_{32} & \cdots & c_{3n} & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{array}\right]$$

پایان مرحله اول، حال مرحله دوم را کاملاً مشابه با مرحله اول برای سطر دوم انجام می‌دهیم و همین کار را تا انتها ادامه داده تا ماتریس را به فرم $[I|B]$ تبدیل کنیم و در این صورت $B = A^{-1}$ می‌باشد، اگر نتوان ماتریس A را به I تبدیل کرد، بدان معنی است که A معکوس پذیر نمی‌باشد.

تمرین

معکوس ماتریس‌های داده شده را در صورت وجود، تعیین کنید.

۱) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

۲) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

موفق و سلامت باشید