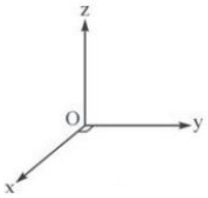
ریاضی عمومی۲-ریاضی کاربردی - بردارها

دانشگاه فنی و حرفه‌ای دختران ارومیه

استاد: اکرم سلطان‌پور

اسفند ۱۳۹۸

- دستگاه مختصات سه بعدی، از سه محور دو به دو عمود برهم، به نام‌های xها، yها و zها تشکیل شده است.
- محل تلاقی سه محور مذکور را O، مبدا مختصات، گویند: $O = (0, 0, 0)$.
- مختصات هر نقطه در دستگاه مختصات سه بعدی، با یک سه تایی مرتب (x, y, z) معرفی می‌شود.
- در حالت کلی دستگاه مختصات سه بعدی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

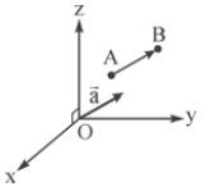


- بردار، از نظر هندسی یک پاره‌خط جهت دار است (که معمولا شروعش را مبدا مختصات می‌گیریم).
- از نظر تحلیلی، بردار یک سه تایی مرتب به صورت (a_1, a_2, a_3) است. سه تایی داده شده برای بردار مختصات نقطه انتهایی است، ابتدای آن هم که مبدا است، یعنی $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

اگر A نقطه ابتدا و B نقطه انتهای پیکان $\overrightarrow{AB}$ باشد، بردار مساوی، هم‌جهت و موازی با $\overrightarrow{AB}$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

- طول بردار $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ برابر است با $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.



عملیات جبری

فرض کنید $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار و r یک عدد حقیقی باشد.

فرض کنید $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار و r یک عدد حقیقی باشد.

- **حاصل جمع دو بردار:** $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

فرض کنید $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار و r یک عدد حقیقی باشد.

- **حاصل جمع دو بردار:** $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
- **حاصل تفاضل دو بردار:** $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

فرض کنید $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار و r یک عدد حقیقی باشد.

- **حاصل جمع دو بردار:** $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
- **حاصل تفاضل دو بردار:** $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
- **حاصلضرب عدد حقیقی k در بردار:** $r\overrightarrow{a} = (ra_1, ra_2, ra_3)$

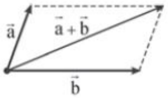
فرض کنید $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار و r یک عدد حقیقی باشد.

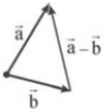
- **حاصل جمع دو بردار:** $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
- **حاصل تفاضل دو بردار:** $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$
- **حاصلضرب عدد حقیقی k در بردار:** $r\overrightarrow{a} = (ra_1, ra_2, ra_3)$
- **ضرب داخلی دو بردار:** $\overrightarrow{a} . \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

عملیات جبری

فرض کنید $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار و r یک عدد حقیقی باشد.

- **حاصل جمع دو بردار:** $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$
- **حاصل تفاضل دو بردار:** $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$
- **حاصلضرب عدد حقیقی k در بردار:** $r\overrightarrow{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$
- **ضرب داخلی دو بردار:** $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$





مثال ۱. فرض کنید $\overrightarrow{a} = (4, -3, 2)$ و $\overrightarrow{b} = (-2, 1, -1)$. بردارهای

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b},\ \ \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b},\ \ 2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b},\ \ \overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}$$

را بیابید.

حل.

- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = ((4) + (-2), (-3) + (1), (2) + (-1)) = (2, -2, 1)$
- $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = ((4) - (-2), (-3) - (1), (2) - (-1)) = (6, -4, 3)$
- $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} = (8, -6, 4) - (-6, 3, -3) = (14, -9, 7)$
- $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = (4)(-2) + (-3)(1) + (2)(-1) = -13$

قضیه

اگر θ زاویه بین دو بردار ناصفر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ باشد، آنگاه $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| cos\theta$

قضیه

اگر θ زاویه بین دو بردار ناصفر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ باشد، آنگاه $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$

نتیجه

زاویه بین دو بردار ناصفر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

قضیه

اگر θ زاویه بین دو بردار ناصفر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ باشد، آنگاه $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\,cos\theta$

نتیجه

زاویه بین دو بردار ناصفر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ را می‌توان از فرمول زیر به دست آورد:

$$cos\,\theta = \frac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$$

با توجه به اینکه $cos\,90 = 0$، لذا می‌توان قضیه زیر را بیان کرد.

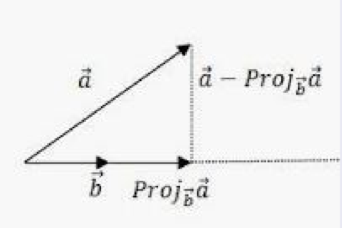
قضیه

دو بردار ناصفر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ **عمود بر هم**اند اگر و تنها اگر $\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b} = 0$

تعریف

بردار **تصویر** بردار $\overrightarrow{a}$ بر بردار $\overrightarrow{b}$ را با $proj_{\overrightarrow{b}}^{\overrightarrow{a}}$ نشان می‌دهند که می‌توان از فرمول زیر به دست آورد

$$proj_{\overrightarrow{b}}^{\overrightarrow{a}} = \frac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{|\ \overrightarrow{b}\ |^2}\overrightarrow{b}$$



مثال ۲. فرض کنید $\overrightarrow{a}=(2,-3,1)$ و $\overrightarrow{b}=(-1,1,-2)$. مطلوبست:

الف. زاویه بین دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$

ب. تصویر بردار $\overrightarrow{a}$ بر بردار $\overrightarrow{b}$

حل.

$$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14},\ \ |\overrightarrow{b}|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6},$$

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=(-2)+(-3)+(-2)=-7$$

الف.

$$cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{6}}=\frac{-7}{\sqrt{84}}$$

ب.

$$proj_{\overrightarrow{b}}^{\overrightarrow{a}}=\frac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2}\overrightarrow{b}=\frac{-7}{6}(-1,1,-2)=(\frac{7}{6},\frac{-7}{6},\frac{14}{6})$$

تعریف

بردارهای

$$\overrightarrow{i}=(1,0,0),\ \ \overrightarrow{j}=(0,1,0),,\ \ \overrightarrow{k}=(0,0,1),$$

را بردارهای یکه می‌نامند.
هر بردار

$$\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$$

را می‌توان به صورت

$$\overrightarrow{a}=a_1\overrightarrow{i}+a_2\overrightarrow{j}+a_3\overrightarrow{k}$$

نوشت.

تعریف

اگر $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ دو بردار باشند، آنگاه **حاصلضرب** برداری $\overrightarrow{a}$ در $\overrightarrow{b}$ را که با $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ نشان می‌دهند برداری است به صورت

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \overrightarrow{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \overrightarrow{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \overrightarrow{k}$$

تعریف

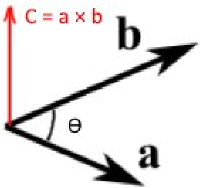
اگر $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3)$ دو بردار باشند، آنگاه **حاصلضرب** برداری $\overrightarrow{a}$ در $\overrightarrow{b}$ را که با $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ نشان می‌دهند برداری است به صورت

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\overrightarrow{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\overrightarrow{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\overrightarrow{k}$$

مثال۳. ضرب خارجی دو بردار $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ و $\overrightarrow{b}=2\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}$ را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}&=((-1)(3)-(2)(1))\overrightarrow{i}+((2)(2)-(1)(3))\overrightarrow{j}\\&+((1)(1)-(1)(2))\overrightarrow{k}=-5\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+3\overrightarrow{k}\end{aligned}$$



قضیه

اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار و θ زاویه بین آنها باشد، آنگاه

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \, sin\theta$$

قضیه

اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار و θ زاویه بین آنها باشد، آنگاه

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin\theta$$

ملاحظه

دو بردار ناصفر موازی‌اند اگر و تنها اگر زاویه بین آنها 0 یا 180 درجه باشد.

قضیه

اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار و θ زاویه بین آنها باشد، آنگاه

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}| \sin\theta$$

ملاحظه

دو بردار ناصفر موازی‌اند اگر و تنها اگر زاویه بین آنها 0 یا 180 درجه باشد.

نتیجه

اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار ناصفر باشند، آنگاه $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ موازی‌اند اگر و تنها اگر $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$.

قضیه

اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار و θ زاویه بین آنها باشد، آنگاه

$$|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\,sin\theta$$

ملاحظه

دو بردار ناصفر موازی‌اند اگر و تنها اگر زاویه بین آنها 0 یا 180 درجه باشد.

نتیجه

اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار ناصفر باشند، آنگاه $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ موازی‌اند اگر و تنها اگر $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=0$.

مثال ۴. فرض کنید $\overrightarrow{a}=(1,-2,0)$ مقدار x را طوری تعیین کنید که بردار $\overrightarrow{b}=(x,6,0)$ با $\overrightarrow{a}$ موازی باشد.

حل.

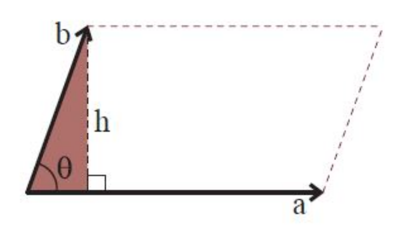
$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=(6+2x)\overrightarrow{k}$$

از $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=0$ نتیجه می‌شود $6+2x=0$، در نتیجه $x=-3$.

تعریف

اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار ناصفر و غیر هم‌جهت با زاویه θ باشند، مساحت متوازي الاضلاعي که روي آ نها بنا مي شود، عبارت است از:

$$S = |\ \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\ |$$



قضیه

اگر $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهایی در فضا و r یک اسکالر باشد، آنگاه

الف) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

ب) $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0} \times \vec{a} = 0$

پ) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

ت) $(r\vec{a}) \times \vec{b} = r(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (r\vec{b})$

ث) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

۱- فرض کنید $\overrightarrow{a} = 4\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$ و $\overrightarrow{b} = -2\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k}$. مطلوبست:

الف) $3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}$

ب) زاویه بین دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$

پ) تصویر بردار $\overrightarrow{a}$ بر $\overrightarrow{b}$

۲- اگر $\overrightarrow{a} = 12\overrightarrow{i} + 9\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$ و $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k}$. فرض شوند، اسکالر d را طوری بیابید که بردار $\overrightarrow{a} - d\overrightarrow{b}$ بر بردار $\overrightarrow{b}$ عمود باشد.

۳- فرض کنید $\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$ و $\overrightarrow{PS} = 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع $PQRS$ باشند. مساحت این متوازی‌الاضلاع را محاسبه کنید. مساحت مثلث PQS چقدر است؟

سلامت و موفق باشید