ریاضی کاربردی - ماتریس

دانشگاه فنی و حرفه‌ای دختران ارومیه

رشته حسابداری

استاد: اکرم سلطان‌پور

اسفند ۱۳۹۸

- هر جدولی از اعداد را که شامل m سطر و n ستون باشد، یک ماتریس m در n می‌نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

هر یک از اعداد a_{ij} را یک عنصر یا درایه ماتریس گویند.

- هر جدولی از اعداد را که شامل m سطر و n ستون باشد، یک ماتریس m در n می‌نامیم.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

هر یک از اعداد a_{ij} را یک عنصر یا درایه ماتریس گویند.

برای مثال هر یک از نمادهای زیر یک ماتریس است.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

تعاریف اولیه

- هرگاه ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ تنها دارای یک سطر باشد، یعنی $m = 1$، این ماتریس را یک ماتریس سطری گویند.

تعاریف اولیه

- هرگاه ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ تنها دارای یک سطر باشد، یعنی $m = 1$، این ماتریس را یک ماتریس سطری گویند.
- هرگاه ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ تنها دارای یک ستون باشد، یعنی $n = 1$، این ماتریس را یک ماتریس ستونی گویند.

تعاریف اولیه

- هرگاه ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ تنها دارای یک سطر باشد، یعنی $m = 1$، این ماتریس را یک ماتریس سطری گویند.
- هرگاه ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ تنها دارای یک ستون باشد، یعنی $n = 1$، این ماتریس را یک ماتریس ستونی گویند.
- اگر تمام درایه‌های ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ صفر باشند، آن را ماتریس صفر گویند.

- هرگاه ماتریس $A=(a_{ij})_{m\times n}$ تنها دارای یک سطر باشد، یعنی $m=1$، این ماتریس را یک ماتریس سطری گویند.
- هرگاه ماتریس $A=(a_{ij})_{m\times n}$ تنها دارای یک ستون باشد، یعنی $n=1$، این ماتریس را یک ماتریس ستونی گویند.
- اگر تمام درایه‌های ماتریس $A=(a_{ij})_{m\times n}$ صفر باشند، آن را ماتریس صفر گویند.
- ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌هایش برابر باشند، یعنی $m=n$، یک ماتریس مربع گویند. در ماتریس مربعی، قطری که شامل عناصر a_{11}، a_{22} و ...و a_{nn} است، قطر اصلی و این عناصر را عناصر قطر اصلی گویند.

- هرگاه ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ تنها دارای یک سطر باشد، یعنی $m = 1$، این ماتریس را یک ماتریس سطری گویند.
- هرگاه ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ تنها دارای یک ستون باشد، یعنی $n = 1$، این ماتریس را یک ماتریس ستونی گویند.
- اگر تمام درایه‌های ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ صفر باشند، آن را ماتریس صفر گویند.
- ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌هایش برابر باشند، یعنی $m = n$، یک ماتریس مربع گویند. در ماتریس مربعی، قطری که شامل عناصر a_{11}، a_{22} و ... و a_{nn} است، قطر اصلی و این عناصر را عناصر قطر اصلی گویند.
- ماتریس مربع $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را یک ماتریس همانی $n \times n$ گویند و با I_n نشان می‌دهند، هرگاه هر یک از درایه‌های روی قطر اصلی برابر یک و سایر عناصر برابر صفر باشند. برای مثال

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- دو ماتریس $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{p\times q}$ را برابر گویند، هرگاه $m=p$، $n=q$ و برای هر i و j که $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ داشته باشیم $a_{ij}=b_{ij}$.

- دو ماتریس $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{p\times q}$ را برابر گویند، هرگاه $m=p$، $n=q$ و برای هر i و j که $i=1,2,\ldots,m$ و $j=1,2,\ldots,n$ داشته باشیم $a_{ij}=b_{ij}$.

مثال۱. مقدار a را طوری بیابید که داشته باشیم

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2a & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

حل. بنا به تعریف تساوی دو ماتریس $2a=4$ یا $a=2$.

فرض کنید $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ و k یک عدد حقیقی باشد.

فرض کنید $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دو ماتریس $m\times n$ و k یک عدد حقیقی باشد.

- **حاصل جمع** این دو ماتریس با $A+B$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

فرض کنید $A = (a_{ij})_{m\times n}$ و $B = (b_{ij})_{m\times n}$ دو ماتریس $m \times n$ و k یک عدد حقیقی باشد.

- **حاصل جمع** این دو ماتریس با $A + B$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

- **حاصلضرب عدد حقیقی** k در ماتریس A با kA نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$kA = (ka_{ij})_{m\times n}$$

مثال۲. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های $A+B$ و $3A$ را بیابید.

حل.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+3 & 4+5 \\ -1+0 & 3-1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال۲. فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های $A+B$ و $3A$ را بیابید.

حل.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1-1 & 2+3 & 4+5 \\ -1+0 & 3-1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$$

قضیه

اگر A، B و C سه ماتریس $m \times n$ و k و h دو عدد حقیقی باشند، آنگاه

- $A+B = B+A$
- $A+(B+C) = (A+B)+C$
- $k(A+B) = kA+kB$
- $(k+h)A = kA+hA$

- ماتریس‌های $A=(a_{ij})_{m\times p}$ و $B=(b_{ij})_{p\times n}$ را در نظر بگیرید. حاصلضرب ماتریس A در ماتریس B، ماتریس $m\times n$ای مانند $C=(c_{ij})_{m\times n}$ است به طوری که

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}$$

در واقع عنصر ijام ماتریس حاصلضرب AB برابر با حاصلضرب عددی سطر i ام ماتریس A در ستون j ام ماتریس B است.

- ماتریس‌های $A = (a_{ij})_{m\times p}$ و $B = (b_{ij})_{p\times n}$ را در نظر بگیرید. حاصلضرب ماتریس A در ماتریس B، ماتریس $n \times m$ای مانند $C = (c_{ij})_{m\times n}$ است به طوری که

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

در واقع عنصر ijام ماتریس حاصلضرب AB برابر با حاصلضرب عددی سطر i ام ماتریس A در ستون j ام ماتریس B است.

مثال۳. ماتریس‌های A و B را به صورت زیر در نظر بگیرید. ماتریس AB را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

حل.

$$AB = \begin{bmatrix} (-1)(-3)+(2)(1)+(1)(-2) & (-1)(2)+(2)(-1)+(1)(4) \\ (3)(-3)+(0)(1)+(2)(-2) & (3)(2)+(0)(-1)+(2)(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -13 & 14 \end{bmatrix}$$

قضیه

اگر $A = (a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مربع $n \times n$ باشد، آنگاه

$$AI_n = A = I_nA$$

قضیه

اگر $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مربع $n\times n$ باشد، آنگاه

$$AI_n = A = I_nA$$

قضیه

اگر $A=(a_{ij})_{m\times p}$، $B=(b_{ij})_{p\times q}$ و $C=(c_{ij})_{q\times n}$، آنگاه

$$A(BC)=(AB)C$$

قضیه

اگر $A = (a_{ij})_{n\times n}$ یک ماتریس مربع $n \times n$ باشد، آنگاه

$$AI_n = A = I_nA$$

قضیه

اگر $A = (a_{ij})_{m\times p}$، $B = (b_{ij})_{p\times q}$ و $C = (c_{ij})_{q\times n}$، آنگاه

$$A(BC) = (AB)C$$

قضیه

اگر $A = (a_{ij})_{p\times n}$، $B = (b_{ij})_{p\times n}$ و $C = (c_{ij})_{m\times p}$، آنگاه

$$C(A+B) = CA + CB$$

- اگر در ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ جای سطرها و ستون‌ها را با یکدیگر عوض کنید، ماتریس حاصل را ماتریس ترانهاده ماتریس A گویند و آن را با A^T نشان می‌دهند.

- اگر در ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ جای سطرها و ستون‌ها را با یکدیگر عوض کنید، ماتریس حاصل را ماتریس ترانهاده ماتریس A گویند و آن را با A^T نشان می‌دهند.

مثال۴. ترانهاده ماتریس‌های زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

حل.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

قضیه

اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آنگاه

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = k(A^T)$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

قضیه

اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آنگاه

- $(A^T)^T = A$
- $(kA)^T = k(A^T)$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

تعریف

ماتریس مربع A را **متقارن** گویند، هرگاه $A^T = A$. برای مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

تعریف

ماتریس مربع A را **شبه متقارن** گویند، هرگاه $A^T = -A$. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف

ماتریس مربع A را **شبه متقارن** گویند، هرگاه $A^T = -A$. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف

ماتریس مربع A را یک ماتریس **قطری** گویند، هرگاه همه عناصر غیر واقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

تعریف

ماتریس مربع $n \times n$، A را **متعامد** گویند، هرگاه $I_n = A^TA = AA^T$. برای مثال

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

تعریف

ماتریس مربع $n \times n$، A را **متعامد** گویند، هرگاه $I_n = A^TA = AA^T$. برای مثال

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

تعریف

ماتریس مربع A را یک ماتریس **بالا مثلثی** گویند، هرگاه همه عناصر زیر قطر اصلی آن صفر باشند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

تعریف

ماتریس مربع A را یک ماتریس **پایین مثلثی** گویند، هرگاه همه عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

تعریف

ماتریس مربع A را یک ماتریس **پایین مثلثی** گویند، هرگاه همه عناصر بالای قطر اصلی آن صفر باشند. برای مثال

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

تعریف

در ماتریس مربع $A = (a_{ij})_{n\times n}$، مجموع تمام عناصر قطر اصلی را **اثر** A نامیده و با $tr(A)$ نشان می‌دهند. بنابراین $tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$.
برای مثال، اگر

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ -4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

آنگاه

$$tr(A) = -2 + 5 + 9 = 12.$$

۱- ماتریس A را طوری بیابید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$2A - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

۲- نوع هر یک از ماتریس‌های زیر را تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \\ 4 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

۳- نشان دهید ماتریس زیر متعامد است.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۴- در تمرین ۳، tr(A) را بیابید.

سلامت و موفق باشید