

ریاضی عمومی ۲ - ریاضی کاربردی - خط و صفحه در فضا (پیش نیاز: مبحث بردارها)

دانشگاه فنی و حرفه‌ای دختران ارومیه

استاد: اکرم سلطان‌پور

اسفند ۱۳۹۸

معادله پارامتری خط: هر خط در فضا با یک نقطه از آن و بردار موازی با آن مشخص می‌شود.

معادله پارامتری خط L که از نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = (a, b, c)$ موازی است، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathcal{R}$$

معادله پارامتری خط: هر خط در فضا با یک نقطه از آن و بردار موازی با آن مشخص می‌شود.

معادله پارامتری خط L که از نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = (a, b, c)$ موازی است، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathcal{R}$$

مثال ۱. معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(2, 1, 0)$ و $B(4, 2, 5)$ بگذرد.

حل. بردار $\vec{AB} = (2, 1, 5)$ موازی خط می‌باشد. معادله خط به کمک نقطه A و بردار \vec{AB} به صورت زیر خواهد بود.

$$x = 2 + 2t, \quad y = 1 + t, \quad z = 0 + 5t$$

معادله متعارف خط: فرض کنید خط L موازی با بردار $\vec{v} = (a, b, c)$ است و از نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد. اگر مقادیر a ، b و c غیر صفر باشند، معادله متعارف خط به صورت زیر تعریف می‌شود.

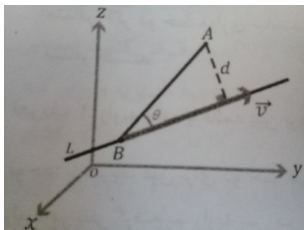
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

تذکر: اگر یکی از مقادیر a ، b و c باشد، به عنوان نمونه اگر: $a = 0$ ، $b \neq 0$ و $c \neq 0$. در این حالت معادله خط را به صورت زیر می‌نویسند.

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

فاصله یک نقطه از خط: فرض کنید L خطی موازی با بردار غیرصفر \vec{v} و A نقطه‌ای از فضا خارج از خط L باشد. هرگاه B یک نقطه دلخواه خط L باشد، فاصله نقطه A تا خط L با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$d = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{v}|}$$



مثال ۲. فاصله نقطه $A(5, -6, 2)$ را از خط L به دست آورید.

$$x = 1, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 2 - 2t$$

حل. ابتدا نقطه دلخواهی از خط L را انتخاب می‌کنیم. با فرض $t = 0$ داریم

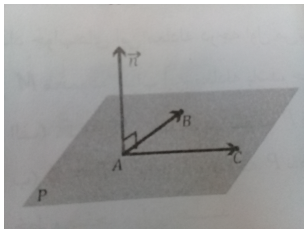
$B(1, -1, 2) \in L$ در نتیجه $\vec{AB} = (-4, 5, 0)$. بردار موازی خط L ، $\vec{v} = (0, 4, -3)$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\vec{v} \times \vec{AB} = 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}$$

$$d = \frac{|\vec{v} \times \vec{AB}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2}}{\sqrt{(0)^2 + (4)^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$$

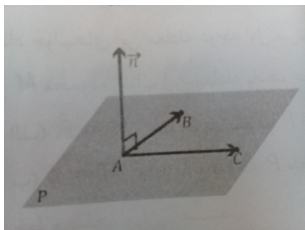
معادله صفحه: اگر $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطه معلومی از صفحه P و بردار غیر صفر $\vec{n} = (a, b, c)$ بر صفحه عمود باشد، آنگاه معادله صفحه P به صورت زیر تعریف می شود.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



معادله صفحه: اگر $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطه معلومی از صفحه P و بردار غیر صفر $\vec{n} = (a, b, c)$ بر صفحه عمود باشد، آنگاه معادله صفحه P به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



مثال ۳. معادله صفحه‌ای که از نقطه $(-2, 1, 3)$ می‌گذرد و بردار $\vec{n} = (2, 5, -1)$ بر آن عمود است را بنویسید.

حل.

$$2(x + 2) + 5(y - 1) - (z - 3) = 0$$

$$2x + 5y - z + 2 = 0$$

فاصله یک نقطه از صفحه: فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $ax + by + cz + d = 0$ از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

فاصله یک نقطه از صفحه: فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $ax + by + cz + d = 0$ از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مثال ۴. فاصله نقطه $(1, 0, 2)$ را از صفحه $4x - 2y + 3z = 1$ به دست آورید.
حل. معادله صفحه به فرم زیر می‌باشد:

$$4x - 2y + 3z - 1 = 0$$

پس داریم

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|4(1) - 2(0) + 3(2)|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{9}{\sqrt{29}}$$

زاویه بین دو صفحه: اگر P و P' دو صفحه متقاطع با بردارهای عمود به ترتیب \vec{n}_1 و \vec{n}_2 باشند، آنگاه زاویه بین دو صفحه P و P' همان زاویه بین بردارهای عمود تعریف می‌شود، یعنی

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

زاویه بین دو صفحه: اگر P و P' دو صفحه متقاطع با بردارهای عمود به ترتیب \vec{n}_1 و \vec{n}_2 باشند، آنگاه زاویه بین دو صفحه P و P' همان زاویه بین بردارهای عمود تعریف می‌شود، یعنی

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

مثال ۵. زاویه بین دو صفحه $x + 4y + 3z = 6$ و $2x - 3y + 3z = 1$ را بیابید.

حل. بردارهای عمود دو صفحه عبارتند از:

$$n_1 = (1, 4, 3), \quad n_2 = (2, -3, 3)$$

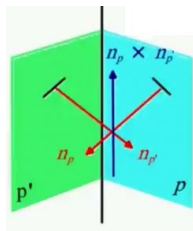
پس داریم:

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2 - 12 + 9}{\sqrt{22}\sqrt{26}} = \frac{-1}{2\sqrt{143}}$$

$$\rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{2\sqrt{143}}\right) = 92/39^\circ$$

معادله فصل مشترک دو صفحه متقاطع: اگر دو صفحه با هم متقاطع باشند، آن دو صفحه در یک خط با هم شریک هستند؛ که به این خط فصل مشترک دو صفحه می‌گویند.

- برای تعیین معادله فصل مشترک دو صفحه که یک خط می‌باشد به یک نقطه از آن خط و بردار موازی آن خط نیاز داریم.
- برای تعیین نقطه روی فصل مشترک کافیست در دو معادله صفحه یکی از متغیرها را صفر قرار دهیم و با حل دستگاه دو معادله مجهول به دست آمده دو مولفه دیگر نقطه روی فصل مشترک را به دست آوریم.
- برای تعیین بردار موازی با توجه به شکل زیر کافیست حاصلضرب بردارهای عمود بر دو صفحه را به دست آوریم.



مثال ۶. معادله فصل مشترک دو صفحه متقاطع زیر را به دست آورید.

$$P: x + 2y - z = 0, \quad P': 2x + 3y + z = 5$$

حل. بردارهای عمود بر این دو صفحه عبارتند از:

$$\vec{n}_1 = (1, 2, -1), \quad \vec{n}_2 = (2, 3, 1)$$

بردار فصل مشترک صفحه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (5, -3, -1)$$

برای یافتن یک نقطه از خط مشترک دو صفحه فرض می‌کنیم $x = 0$ ، لذا داریم:

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ 3y + z = 5 \end{cases} \rightarrow y = 1, z = 2$$

در نتیجه $\vec{n} = (5, -3, -1)$ بردار موازی فصل مشترک و نقطه $A(0, 1, 2)$ واقع بر فصل مشترک دو صفحه است. پس معادله فصل مشترک را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{x-0}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{-1} \rightarrow \frac{x}{5} = \frac{1-y}{3} = 2-z$$

۱- فاصله نقطه $A(2, 0, 1)$ از خط زیر به دست آورید.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+2}{3}$$

۲- معادله پارامتری و متعارف فصل مشترک دو صفحه زیر را بنویسید.

$$x + y = 1, \quad y + z = 2$$

۳- معادله صفحه گذرنده از نقطه $A(2, 3, 0)$ و عمود بر خط زیر را بنویسید.

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

۴- فاصله نقطه $A(2, 0, 1)$ از صفحه زیر را به دست آورید.

$$2x - y + z = 1$$

۵- زاویه بین دو صفحه زیر را به دست آورید.

$$5x - 2y = 3, \quad 2x - y + z = 0$$

سلامت و موفق باشید