ریاضی عمومی۲-ریاضی کاربردی - دترمینان(ادامه بحث ماتریس(۱))

دانشگاه فنی و حرفه‌ای دختران ارومیه

استاد: اکرم سلطان‌پور

اسفند ۱۳۹۸

به هر ماتریس مربع، عددی به نام **دترمینان** نسبت داده می‌شود. در حل بسیاری از مسایل خطی از جمله دستگاه‌های معادلات خطی از دترمینان استفاده می‌شود.
دترمینان ماتریس A با $detA$ یا $|A|$ نشان داده می‌شود.

به هر ماتریس مربع، عددی به نام **دترمینان** نسبت داده می‌شود. در حل بسیاری از مسایل خطی از جمله دستگاه‌های معادلات خطی از دترمینان استفاده می‌شود.
دترمینان ماتریس A با $detA$ یا $|A|$ نشان داده می‌شود.

۱. ماتریس 1×1 تنها دارای یک عنصر است، دترمینان این ماتریس برابر با عدد a_{11} تعریف می‌شود.
برای مثال

$$A = [2], \quad detA = 2.$$

۲. دترمینان ماتریس 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$detA = \mid A \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

۲. دترمینان ماتریس 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$detA = \mid A \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

برای مثال اگر

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

در این صورت

$$detA = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(2) - (3)(4) = -14.$$

۳. ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را در نظر بگیرید.

تعریف

فرض کنید M_{ij}، ماتریسی $(n-1)\times(n-1)$ باشد که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست آمده است. دترمینان ماتریس M_{ij}، یعنی $|M_{ij}|$، **مینور** یا **کهاد** عنصر a_{ij} در ماتریس A گویند.

۳. ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را در نظر بگیرید.

تعریف

فرض کنید M_{ij}، ماتریسی $(n-1)\times(n-1)$ باشد که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست آمده است. دترمینان ماتریس M_{ij}، یعنی $|M_{ij}|$، **مینور** یا **کهاد** عنصر a_{ij} در ماتریس A گویند.

برای مثال اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 1\\ 7 & -4 & 6\end{bmatrix}$، آنگاه

$$|M_{11}|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -4 & 6\end{vmatrix}=(3)(6)-(1)(-4)=22,$$

$$|M_{22}|=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 7 & 6\end{vmatrix}=(-1)(6)-(4)(7)=-34,$$

$$|M_{32}|=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=(-1)(1)-(4)(5)=-21.$$

تعریف

همسازه یا **کوفاکتور** عنصر a_{ij} در ماتریس A را که عددی حقیقی است، با A_{ij} نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \mid M_{ij} \mid$$

تعریف

همسازه یا **کوفاکتور** عنصر a_{ij} در ماتریس A را که عددی حقیقی است، با A_{ij} نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \mid M_{ij} \mid$$

برای مثال برخی همسازه‌های ماتریس A در اسلاید قبلی عبارت‌اند از

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \mid M_{11} \mid = (-1)^2(22) = 22,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \mid M_{22} \mid = (-1)^4(-34) = -34,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \mid M_{32} \mid = (-1)^5(-21) = 21.$$

دترمینان ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ به صورت

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

تعریف می‌شود و گفته می‌شود **دترمینان** A **بر حسب سطر** i **ام بسط داده شده است.**

دترمینان ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ به صورت

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

تعریف می‌شود و گفته می‌شود **دترمینان A بر حسب سطر i ام بسط داده شده است.**

ملاحظه

- چون $|M_{ij}|$ $A_{ij} = (-1)^{i+j}$، *لذا علامت جمله‌ها در بسط دترمینان بر حسب سطر i ام یک در میان منفی خواهد بود.*
- *برای محاسبه دترمینان یک ماتریس، یک سطر را انتخاب کرده و هر عنصر این سطر را در همسازه‌اش ضرب و سپس مقادیر حاصل را با هم جمع می‌کنیم.*

مثال ۱. دترمینان ماتریس 3×3 زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

حل. دترمینان A را نسبت به سطر اول بسط می‌دهیم، داریم

$$\begin{aligned} detA = & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ = & (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ & +(2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ = & (0-16) + (2-12) + 2(8-0) = 10 \end{aligned}$$

تمرین. دترمینان ماتریس A را برحسب بسط نسبت به سطر دوم و سوم بیابید.

قضیه

۱. دترمینان ماتریس مربع A و ترانهاده A برابر است، یعنی $|A^T| = |A|$.
۲. اگر تمام عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریس A صفر باشند، آنگاه $|A| = 0$.
۳. اگر تمام عناصر یک سطر یا یک ستون ماتریس A در عدد r ضرب شود آنگاه دترمینان ماتریس حاصل برابر با $r|A|$ است.
۴. دترمینان ماتریس حاصل از تعویض دو سطر یا دو ستون ماتریس A مساوی با منهای دترمینان A است.
۵. اگر دو سطر یا دو ستون ماتریسی برابر باشند، آنگاه دترمینان آن برابر با صفر است.
۶. دترمینان یک ماتریس قطری، پایین مثلثی یا بالا مثلثی برابر با حاصلضرب عناصر روی قطر اصلی آن‌ها است.
۷. دترمینان ماتریس همانی برابر با یک است، یعنی $|I_n| = 1$.
۸. دترمینان حاصلضرب دو ماتریس برابر با حاصلضرب دترمینان‌های آن‌ها است، یعنی $|AB| = |A||B|$.

تعریف

اگر دترمینان ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$، برابر صفر باشد، ماتریس A را **منفرد** گویند، در غیر این صورت ماتریس را **نامنفرد** گویند.

تعریف

اگر دترمینان ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$، برابر صفر باشد، ماتریس A را **منفرد** گویند، در غیر این صورت ماتریس را **نامنفرد** گویند.

مثال ۲. نشان دهید ماتریس زیر منفرد است.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & -3\\ 7 & 4 & -6\end{bmatrix}$$

حل. دترمینان A را نسبت به سطر اول بسط می‌دهیم، داریم

$$\begin{aligned} detA = \; & a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\\ = \; & (-1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{vmatrix}+(0)A_{12}+(0)A_{13}\\ = \; & -(-12+12)+0+0=0. \end{aligned}$$

۱- دترمینان ماتریس‌های زیر را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

۲- مقادیر a را طوری تعیین کنید که

$$\begin{vmatrix} a & -1 \\ -4 & a \end{vmatrix} = 0.$$

۳- معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & a & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

سلامت و موفق باشید