ریاضی کاربردی - وارون ماتریس(ادامه بحث ماتریس(۲))

دانشگاه فنی و حرفه‌ای دختران ارومیه

رشته حسابداری

استاد: اکرم سلطان‌پور

اسفند ۱۳۹۸

تعریف

ماتریس مربع $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را **وارون‌پذیر** گویند، اگر ماتریسی مانند $B = (b_{ij})_{n\times n}$ وجود داشته باشد بطوری که

$$AB = BA = I_n.$$

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آنگاه وارون آن منحصر به فرد است. وارون ماتریس A را در صورت وجود با نماد A^{-1} نشان می‌دهند.

تعریف

ماتریس مربع $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را **وارون‌پذیر** گویند، اگر ماتریسی مانند $B=(b_{ij})_{n\times n}$ وجود داشته باشد بطوری که

$$AB=BA=I_n.$$

اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آنگاه وارون آن منحصر به فرد است. وارون ماتریس A را در صورت وجود با نماد A^{-1} نشان می‌دهند.

مثال ۱. نشان دهید ماتریس $B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ است.

حل. داریم

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

و

$$BA=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I_2$$

بنابراین $B=A^{-1}$.

تعریف

ترانهاده ماتریس همسازه‌های ماتریس مربع A را **ماتریس الحاقی** A گویند و با $adjA$ نشان می‌دهند. پس

$$adjA = (A_{ij})^T.$$

تعریف

ترانهاده ماتریس همسازه‌های ماتریس مربع A را **ماتریس الحاقی** A گویند و با $adjA$ نشان می‌دهند. پس

$$adjA = (A_{ij})^T.$$

مثال ۲. ماتریس الحاقی ماتریس A را بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

حل. همسازه‌های ماتریس A عبارتند از

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \mid M_{11} \mid = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \mid M_{12} \mid = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \mid M_{13} \mid = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{21} = 1,\ A_{22} = -5,\ A_{23} = 3,\ A_{31} = -5,\ A_{32} = 4,\ A_{33} = -1.$$

بنابراین ماتریس همسازه‌های A برابر است با

$$B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه ماتریس الحاقی A برابر است با

$$adjA = B^T = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

قضیه

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه

$$A(adjA) = (adjA)A = (detA)I_n.$$

قضیه

اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه

$$A(adjA) = (adjA)A = (detA)I_n.$$

نتیجه

اگر $detA \neq 0$، آنگاه وارون A وجود دارد و برابر است با

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA.$$

عکس این نتیجه نیز برقرار است. یعنی اگر A وارون‌پذیر باشد، آنگاه $detA \neq 0$.

مثال ۳. وارون ماتریس داده شده در **مثال ۲** را بیابید.

حل. دترمینان ماتریس A را محاسبه می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
detA &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\
&= (1)(6) + (2)(-2) + (3)(-3) = -7
\end{aligned}
$$

چون $detA \neq 0$، پس A^{-1} وجود دارد. بنابراین داریم

$$
A^{-1} = \frac{-1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{7} & \frac{-1}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} & \frac{-4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}
$$

قضیه

اگر A و B دو ماتریس مربع $n \times n$ وارون‌پذیر باشند، آنگاه

۱. ماتریس حاصلضرب AB وارون‌پذیر است و

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

۲. ماتریس ترانهاده A وارون‌پذیر است و

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

۳. وارون ماتریس وارون A برابر A است، یعنی

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

۴. دترمینان وارون ماتریس A برابر با معکوس دترمینان A است، یعنی

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}.$$

مثال ۴. دترمینان وارون ماتریس A را بدون محاسبه A^{-1} تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

حل. داریم

$$detA^{-1} = \frac{1}{detA}.$$

و

$$\begin{aligned} detA &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (0)A_{31} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-2)(3-2) + (3)(3-2) = 1. \end{aligned}$$

بنابراین دترمینان وارون A برابر است با $detA^{-1} = 1$.

۱- وارون ماتریس‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۲- نشان دهید ماتریس‌های زیر وارون‌پذیر نیستند.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

۳- تعیین کنید برای چه مقادیری از a، ماتریس زیر وارون‌پذیر است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}$$

۴- بدون محاسبه A^{-1} دترمینان آن را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵- فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

سلامت و موفق باشید